

Travail

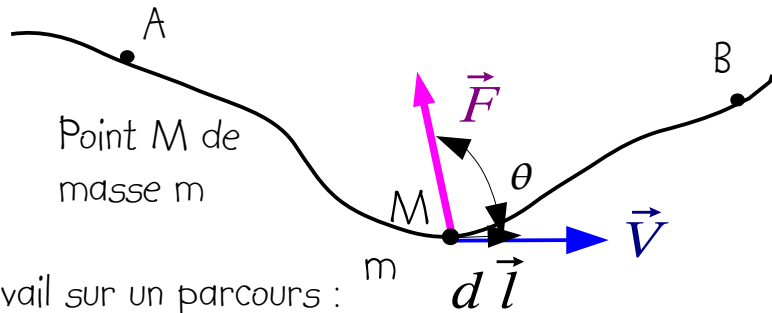
Puissance

Énergie

Le concept d'énergie physique est né avec la révolution industrielle au XIX^{ème} siècle ...

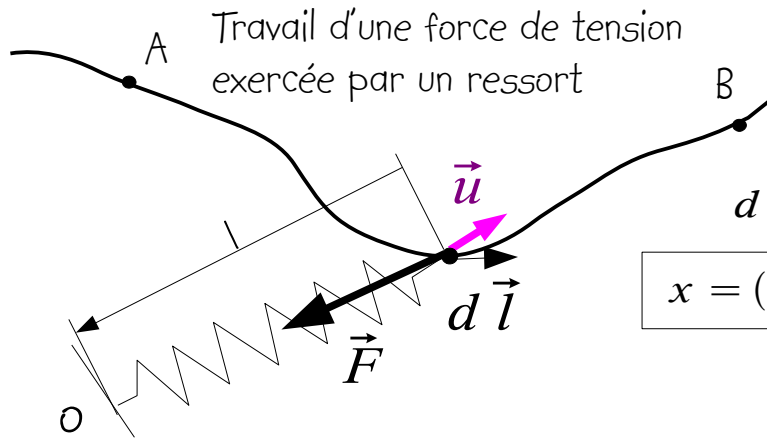
Et cela reste le problème essentiel de l'aire industrielle !

Travail (work)



travail sur un parcours :

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



travail élémentaire d'une force :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos \theta \quad [W] = \text{Joule (J)}$$

Peut être > 0 ou < 0 selon l'angle entre \vec{F} et $d\vec{l}$

Une force qui ne se déplace pas ne travaille pas !
 Une force qui est constamment perpendiculaire à son déplacement ne travaille pas plus ! exemples : force magnétique sur un point chargé en mouvement ou réaction d'un support sans frottement

$$\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u} \quad \vec{l} = l\vec{u}$$

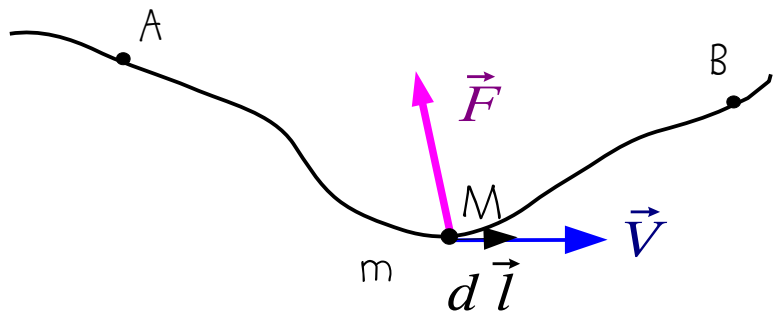
$$d\vec{l} = dl\vec{u} + l d\vec{u} \quad \vec{u} \perp d\vec{u}$$

$$dW = -k(l-l_0)\vec{u} \cdot (dl\vec{u} + l d\vec{u}) = -k(l-l_0) dl$$

$$x = (l-l_0) \Rightarrow dx = dl \quad dW = -kx dx = -d\left(\frac{kx^2}{2}\right)$$

$$W_A^B = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

Puissance (power)



Puissance instantanée développée par une force :

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt} \quad [P] = \text{Watt (W)}$$

$$P(t) = \vec{F}(t) \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F}(t) \cdot \vec{V}(t) = F(t)V(t)\cos\theta$$

Puissance nécessaire à un véhicule pour se déplacer dans l'air :

$$\vec{F}_f = -\frac{1}{2} C_x \rho S V \vec{V}$$

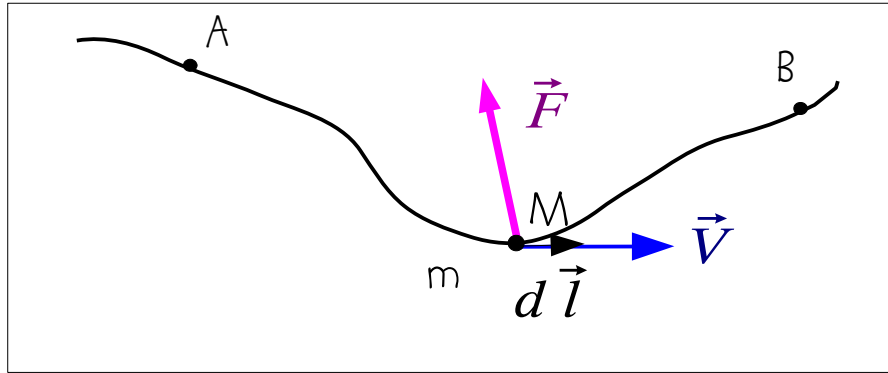
$$P_f = \vec{F}_f \cdot \vec{V} = -\frac{1}{2} C_x \rho S V \vec{V} \cdot \vec{V} = -\frac{1}{2} C_x \rho S V^3$$

$$P_v = -P_f$$

$$V_{max} = \sqrt[3]{\frac{2P_v^{max}}{C_x \rho S}}$$

La puissance d'un moulin à vent ou d'une éolienne croît aussi comme le cube de la vitesse du vent !

Énergie cinétique (kinetic energy)



PFD : donc référentiel Galiléen
et masse constante

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} = \frac{dW}{dt}$$

$$dW = m d\vec{V} \cdot \vec{V} = m d\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) = d\left(\frac{1}{2} m V^2\right)$$

référentiel inertiel

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2 \quad \text{énergie cinétique en Joules (J)}$$

Théorème de l'énergie cinétique :

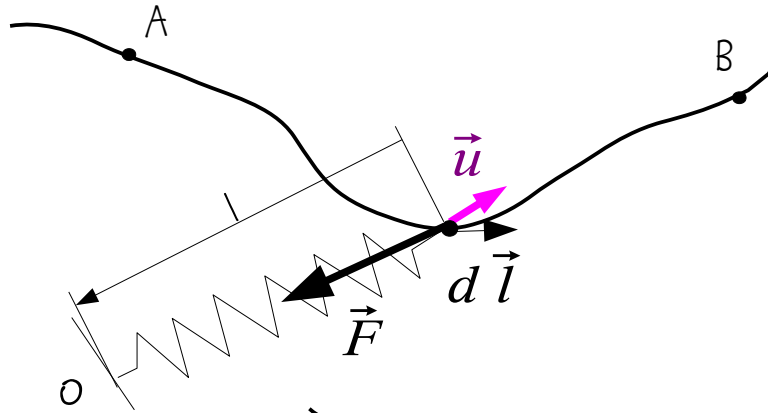
$$dW = dE_c$$

$$W_A^B = \int_A^B d(E_c) = E_c^B - E_c^A$$

vrai uniquement dans un référentiel galiléen

Le travail d'une force appliquée à un point matériel qui se déplace de A à B est égal à la variation de son énergie cinétique entre A et B.

Forces conservatives



Travail d'un ressort :

$$dW = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$W_A^B = \int_A^B dW = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

Ce travail ne dépend pas du chemin suivi entre A et B !

Si on parcourt le chemin de A à B puis B à A, la somme des travaux est nulle

Travail des forces gravitationnelles :

$$\vec{F} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

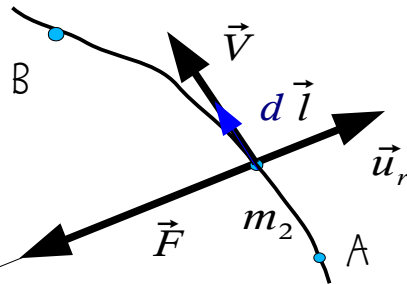
$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_r \quad \text{et} \quad d\vec{u}_r \perp \vec{u}_r$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_r) = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = d\left(K_G \frac{m_1 m_2}{r}\right)$$

$$W_A^B = \int_A^B dW = K_G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Ce travail ne dépend pas du chemin suivi entre A et B !

m_1
O fixe



Forces conservatives et énergie potentielle

Une force est dite conservative si son travail d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin parcouru

Mathématiquement, cela est équivalent à formuler que le travail élémentaire de cette force est une différentielle totale (avec un signe moins) :

$$dW = -d(E_p)$$

E_p est appelée l'énergie potentielle (en Joules J)

(potential energy) - E_p ne peut dépendre que des variables

cinématiques de position (x, y, z ...)

et pas des coordonnées de la vitesse

$$W_A^B = \int_A^B dW = \int_A^B -d(E_p) = E_p^A - E_p^B$$

Pour un ressort : $dW = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2 + cte = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + cte$

Pour une force gravitationnelle entre deux masses ponctuelles : $dW = d\left(K_G \frac{m_1 m_2}{r}\right) \Rightarrow E_p = -K_G \frac{m_1 m_2}{r} + cte$

La constante ne jouera aucun rôle dans la pratique, car nous ne nous intéresserons qu'à des différences d'énergies potentielles.

L'énergie potentielle « mesure » la potentialité de fournir de l'énergie : évident pour le cas du ressort, un peu moins frappant pour la force de gravitation mais E_p diminue tout de même quand r diminue

Forces conservatives et énergie potentielle

$$d(E_p) = -dW = -\vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{F} = -\text{grad}(E_p) = -\vec{\nabla}(E_p)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$d(E_p) = -(F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k})$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}(E_p) = \frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} \quad \text{Vecteur gradient de la fonction } E_p \text{ (énergie potentielle ici)}$$

Exemple de vecteur gradient : vecteur indiquant la direction de plus grande pente sur une surface 3D donnée par la fonction $z(x,y)$ (l'altitude en fonction de x et y)

$$\vec{\nabla}(z(x,y)) = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \vec{j}$$

Une force conservative dérive d'une énergie potentielle !

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla}(E_p) = \frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k}$$

Forces dissipatives (non conservatives)

Le travail de ces forces conduit à des pertes d'énergie irréversibles

Mathématiquement, le travail de ces forces est toujours négatif. Leur travail élémentaire ne peut pas s'exprimer sous la forme d'une différentielle totale et de ce fait l'énergie dissipée (travail négatif) dépend du chemin parcouru.

Exemple : force de frottement visqueux : $dW = -k \vec{V} \cdot d\vec{l} = -k \vec{V} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} dt = -k \vec{V} \cdot \vec{V} dt = -k V^2 dt$

$W_A^B = E_c^B - E_c^A$ Théorème de l'énergie cinétique. Il est toujours vrai dans un référentiel inertiel que les forces soient conservatives ou dissipatives

$$W_A^B = (W_A^B)_C + (W_A^B)_{NC}$$

← Travail des forces conservatives
← Travail des forces dissipatives

$$W_A^B = E_c^B - E_c^A = (W_A^B)_C + (W_A^B)_{NC} = E_p^A - E_p^B + (W_A^B)_{NC}$$

$$(E_c^B + E_p^B) - (E_c^A + E_p^A) = (W_A^B)_{NC} = E_M^B - E_M^A \quad \text{avec}$$

$$E_M = E_c + E_p \quad \text{énergie mécanique (mechanical energy)}$$

Théorème de l'énergie mécanique :

$$E_M^B - E_M^A = (W_A^B)_{NC}$$

Puisque le travail dissipatif est toujours négatif, l'énergie mécanique ne peut que décroître ou rester constante si le système est conservatif

Conservation de l'énergie mécanique et états liés (bound states)

L'énergie cinétique d'un système est toujours positive :

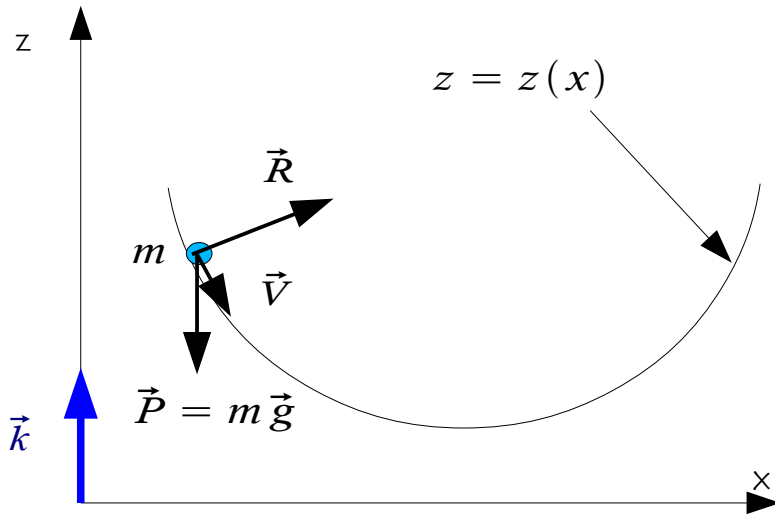
$$E_M = E_c + E_p \geq E_p$$

Il faut noter ici que l'énergie potentielle englobe toutes les énergies potentielles de toutes les forces conservatives qui agissent sur le système

Si le système est purement conservatif, l'énergie mécanique de ce système se conserve au cours du mouvement, elle reste donc à tout moment supérieure ou égale à l'énergie potentielle de ce système.

Ceci impose une contrainte sur les états possibles du système.

Exemple : masse glissant sans frottement dans un cavité lisse, lâchée à vitesse nulle à $t=0$.



La réaction de la paroi est constamment perpendiculaire à la vitesse car glissement sans frottement.

$\vec{R} \cdot \vec{V} = 0$ Cette force ne travaille pas ! Elle ne contribue pas à l'énergie mécanique.

$$\vec{P} = -m g \vec{k} = -\vec{\nabla} E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = m g \Rightarrow E_p = m g z + cte$$

Pour simplifier on choisit $cte = 0$

$$E_p = m g z(x) \text{ et finalement } E_M = \frac{1}{2} m V^2 + m g z(x)$$

Conservation de l'énergie mécanique et états liés (bound states)

Exemple : masse glissant sans frottement dans un cavité lisse, lâchée à vitesse nulle à $t=0$.

$$E_M = E_c + E_p \geq E_p$$

$$E_M = \frac{1}{2} m V^2 + m g z(x)$$

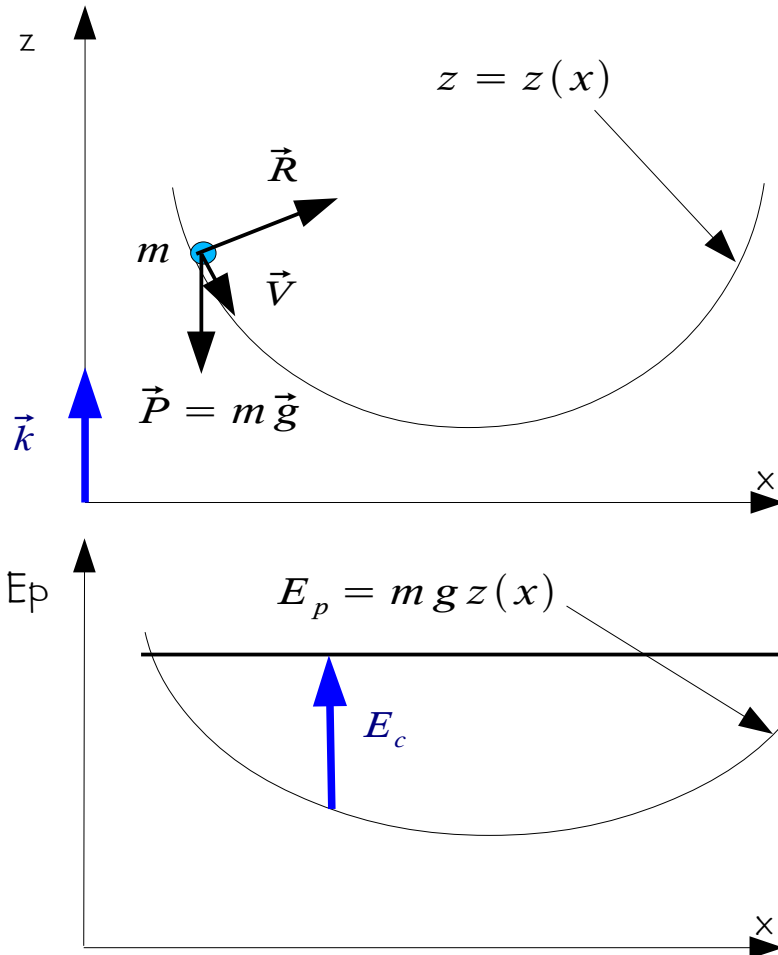
à $t=0, V=0$ et $z=z_0$ $E_M = m g z_0$

$$E_M = E_c + E_p \geq E_p \Rightarrow m g z_0 \geq E_p \Rightarrow m g z_0 \geq m g z \Rightarrow z_0 \geq z$$

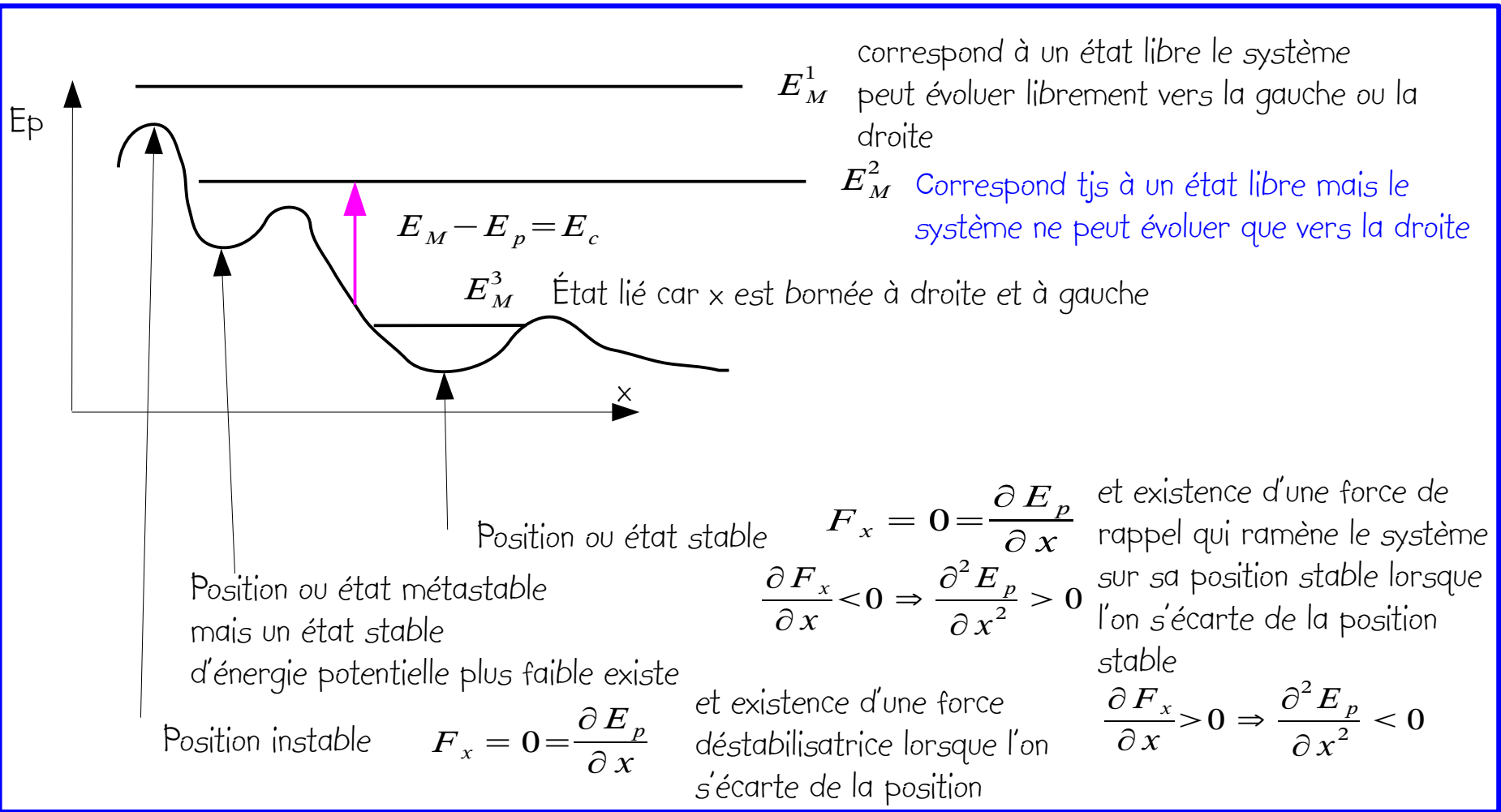
La masse m est dans un état lié car elle ne peut pas sortir de la cavité

$$E_M = m g z_0$$

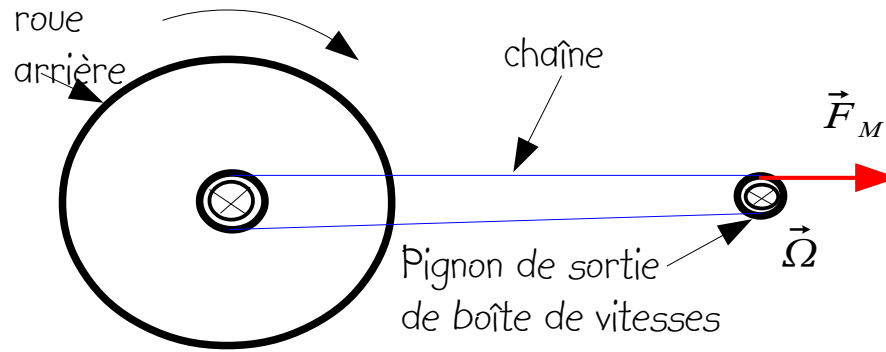
Diagramme d'énergie de la masse liée dans le cavité lisse. Elle est liée dans le puits de potentiel E_p



États libres et liés et conditions d'équilibre



Application : courbes de couple et de puissance d'une moto



Puissance délivrée par le moteur sur le pignon de sortie de boîte de vitesses

$$P = \vec{F}_M \cdot \vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{d(\vec{OM})}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

$$P = \vec{F}_M \cdot \vec{V} = \vec{F}_M \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = (\vec{OM} \wedge \vec{F}_M) \cdot \vec{\Omega} = \vec{M}_{\vec{F}_M} \cdot \vec{\Omega}$$

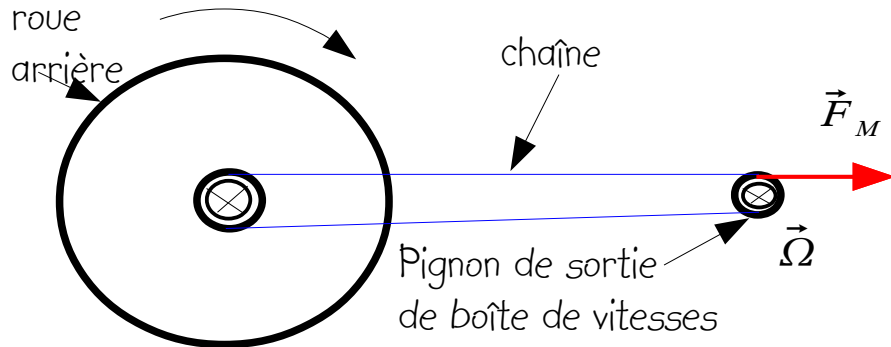
Dans le cas d'une moto, le couple moteur et le vecteur rotation sont colinéaires et portés par l'axe de sortie de boîte

$$P = M_{\vec{F}_M} \Omega = M_{\vec{F}_M} \frac{d\theta}{dt} \quad \text{en N m rad s}^{-1} \text{ mais plus souvent m. Kg tours/mn}$$

moment ou couple «moteur»

vecteur de rotation

Application : courbes de couple et de puissance d'une moto



Dans le cas d'une moto, le couple moteur et le vecteur rotation sont colinéaires et portés par l'axe de sortie de boîte

$$P = M_{\vec{F}_M} \Omega = M_{\vec{F}_M} \frac{d\theta}{dt} \quad \text{en N m rad s}^{-1} \text{ mais plus souvent m. kg tours/mn}$$

Accélération donnée par le couple «moteur», vitesse maximale donnée par la puissance maximale délivrée.

Le couple «moteur» est relativement constant, donc la puissance croît avec la vitesse de rotation (le régime) du moteur

Au-delà d'un certain régime (>11000 tr/mn) le moteur ne fonctionne plus correctement, la puissance et le couple s'écroulent

→ **SUZUKI GSF 650**

Puissance: 83,7 ch à 9 800 tr/min
Couple: 6,6 m.kg à 7 700 tr/min

→ **HONDA CBF**

Puissance: 74,8 ch à 10 900 tr/min
Couple: 5,9 m.kg à 8 200 tr/min

→ **SUZUKI GSF 600**

Puissance: 77 ch à 10 500 tr/min
Couple: 5,7 m.kg à 9 200 tr/min

