Introduction à la relativité

Table des matières

1 Préambule :

Ce chapitre traite de la description des lois du mouvement (Newton), puis de toutes les lois de la physique (Einstein), le tout dans un référentiel Galiléen (principe de relativité restreinte). On peut aussi le voir comme un exposé court sur l'histoire de la perception du mouvement, laquelle n'est pas aussi intuitive que cela pourrait paraître à première vue. La question que vous devez vous poser pour vous en persuader est la suivante : avez-vous la sensation lorsque vous dormez tranquillement, que vous tournez et qu'en plus vous vous déplacez à près de 30 km s^{-1} autour du Soleil? Nos sens - sans la pensée – sont souvent de bien piètres instruments.

2 Relativité newtonienne :

Pour établir son premier principe – dans lequel la notion de repos ou de mouvement uniforme d'un corps apparaît - Newton avait cru bon d'introduire la notion d'espace «mathématique» et de temps absolus et immuables. Il les définissait de la façon suivante :

> «L'espace absolu, par sa nature propre, sans relation aucune avec les choses extérieures, demeure toujours identique à lui-même et immobile.»
> «Sans relation à rien d'extérieur, le temps absolu, vrai, mathématique, s'écoule uniformément et s'appelle la durée.»

Ainsi, il existait logiquement la possibilité de définir un référentiel absolu, immobile, lié à l'espace absolu, donc non-accéléré et de ce fait Galiléen (ou encore inertiel), à partir duquel d'autres référentiels Galiléens (en mouvement relatif uniforme par rapport à la référence absolue) pouvaient être construits. Il faut aussi remarquer que le temps (ou la durée) de Newton ne change pas lorsque l'on passe d'un référentiel Galiléen à un autre. Il n'y a qu'un seul temps et qu'une seule façon de le percevoir physiquement (mis à part les changements d'unités bien évidemment).

Cette construction logique se heurtait cependant à cette constatation, tirée du deuxième principe de la mécanique, qui n'avait pas échappé à la perspicacité de Newton (ni de Galilée du reste) et que l'on appelle le principe de relativité de Newton :

> «Les mouvements relatifs des corps enfermés dans un espace donné sont identiques, que cet espace soit au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme, sans mouvement circulaire.»

Du deuxième principe, que l'on énonce dans un référentiel inertiel, désigné R (donc on suppose qu'il en existe au moins un) - pour une masse m ponctuelle située au point M et soumise à des forces extérieures données (exemple un ressort accroché à une masse dans un laboratoire) - par :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\Gamma} \text{ , avec } \vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \text{ ,}$$

on peut aisément montrer que les mêmes forces appliquées sur la même masse, dans un autre référentiel inertiel R' (un autre laboratoire) se déplaçant à la vitesse constante $\vec{V}_r$ relativement au premier référentiel donne lieu aux mêmes effets physiques, c'est-à-dire à la même loi . Dans le référentiel R', la vitesse de M est donnée par:

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_r \Rightarrow \vec{\Gamma}' = \frac{\mathrm{d}\vec{V}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{V} - \vec{V}_r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Gamma} \text{, car } \vec{V}_r \text{ est constante .}$$

Ainsi, les mêmes forces conduisent à la même loi : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\Gamma}$, et aux mêmes effets physiques mesurés dans R ou dans R', à condition que les forces soient invariantes d'un référentiel à l'autre, ce qui est supposé être le cas en mécanique Newtonienne (ceci revient à supposer qu'une force ne peut dépendre de la vitesse que de manière relative : c'est-à-dire d'une vitesse relative entre l'objet sur lequel s'applique cette force et sa source).

Selon le principe de relativité de Newton, il n'existe pas de moyen de savoir si vous êtes au repos ou en mouvement uniforme dans l'espace absolu !

Vous pouvez facilement comprendre ce principe en remarquant que si vous vous trouvez dans un train qui roule à vitesse constante, et si vous êtes plongé dans l'obscurité avec les oreilles bouchées, alors il ne vous est pas possible de distinguer le mouvement du train.

Par ce principe, énoncé - et cela n'est pas totalement anodin comme nous le verrons par la suite – dans un livre sur l'optique, Newton vidait de son sens physique l'espace absolu qu'il venait d'introduire car aucune expérience de mécanique menée dans un laboratoire (la concrétisation d'un référentiel Galiléen) ne semblait pouvoir indiquer si ce laboratoire était en mouvement uniforme ou au repos dans l'espace absolu. Il n'existait donc pas de moyen pour déterminer si un observateur (un mécanicien) était en mouvement ou au repos dans l'espace absolu. Leibnitz, contemporain de Newton, avait d'ailleurs vivement critiqué, sur cette base, la notion d'espace et de mouvement absolus qu'il récusait.

Cette affaire avait profondément troublé Newton qui n'était pas dupe et voyait là une faille incontournable dans son oeuvre gigantesque. Mais l'état du développement de la science expérimentale de l'époque ne lui donnait pas les moyens d'aller plus loin. Il aurait fallu qu'il puisse vivre deux siècles de plus !

Ce paragraphe s'achève sur deux citations qui en disent long sur l'intuition scientifique des grands savants et sur leur respect mutuel. Newton parlant de sa force de gravitation et préfigurant la théorie moderne des interactions :

> «Que la gravité soit infuse, inhérente et essentielle à la matière, de telle façon qu'un corps agisse à distance sur un autre à travers le vide, sans intervention d'un facteur qui acheminerait les forces et leur action d'un corps à l'autre, tout cela me paraît d'une telle absurdité qu'à mon sens, aucun homme capable de réfléchir en philosophe ne pourra jamais s'y laisser prendre.»

Einstein s'adressant à travers le temps à Newton :

> «Tu as trouvé la seule et unique voie qui, à l'époque, s'offrait à un homme doté des plus grands pouvoirs de l'intelligence et de la créativité. Les concepts que tu as créés dominent encore nos conceptions de la physique, bien que nous sachions maintenant qu'il faut les remplacer par d'autres, plus éloignés du domaine de l'expérience immédiate, si nous voulons comprendre plus profondément les relations qui existent entre les choses.»

Newton le savait, mais les faits lui échappaient.

3 De l'impossibilité de mesurer une vitesse absolue :

Au XIX^{ème} siècle, allaient survenir d'autres grands développements scientifiques, dont l'établissement de la théorie complète de l'électromagnétisme et de la lumière par Maxwell. L'électricité, le magnétisme et l'optique apparaissaient alors splendidement unifiés dans une même théorie.

Tôt au début du XIX^{ème} siècle, Thomas Young (médecin, physicien et égyptologue !) prouva que la lumière avait un comportement ondulatoire, alors que celle-ci avait été supposée de nature corpusculaire par Newton. La controverse levée (il n'était pas facile de s'opposer aux idées développées par Newton), on imagina alors que ces ondes lumineuses devaient se propager dans un fluide d'une nature nouvelle que l'on désigna sous le nom d'éther. Comme on observait que la lumière nous venait de tout lieu de l'Univers, on en déduisit que l'éther remplissait tout l'espace et on en conclut assez vite que c'était là une «matérialisation» du concept d'espace absolu de Newton. L'éther immobile remplissait et formait l'espace absolu.

Un peu plus tard, grâce aux expériences du génial et autodidacte Michael Faraday (qui n'eut jamais recours aux mathématiques !), la notion d'un champ électrique et magnétique partout présent dans l'espace prit forme : observation de l'orientation des corpuscules de limaille de fer autour d'un aimant. Elle fut conceptualisée mathématiquement par James Maxwell sous la forme d'équations différentielles couplées, qui portent son nom, et qui rendaient compte de tous les phénomènes électriques, magnétiques et optiques observés jusqu'alors, et en prédisaient d'autres comme la propagation d'ondes électromagnétiques que l'on utilise massivement de nos jours. Le champ électromagnétique était porté par l'éther. Des ondes de champ pouvaient s'y propager. Et la lumière correspondait aux ondes électromagnétiques possédant des fréquences comprises dans une certaine gamme, celle du visible. Toutes ces conclusions ont résisté à l'usure du temps à l'exception de l'éther - le vestige de l'espace absolu de Newton - qui a disparu dans la révolution d'Einstein de 1905.

Les équations de Maxwell possèdent une propriété qui apparaissait alors comme une bizarrerie. Elle fut exploitée au cours du XIX$^{\text{ème}}$ siècle pour tenter de mesurer la vitesse absolue de notre terre dans l'éther. Ces équations ne sont pas invariantes par transformation de Galilée : c'est-à-dire qu'elles ne satisfont pas au principe de relativité de Newton. Alors cela signifiait que des expériences d'optique identiques mais conduites dans deux référentiels inertiels en mouvement uniforme relatif devaient produire des résultats différents qui dépendaient de leur vitesse absolue par rapport à l'éther (supposé immobile). L'optique de Maxwell alliée à la mécanique de Newton devaient nous révéler la vitesse absolue de la terre. Des expériences furent tentées immédiatement pour la mesurer. La plus célèbre et la plus sophistiquée d'entre-elles est l'expérience de Michelson et Morley qui utilisaient un interféromètre mis au point à cette occasion. À la stupeur de tout le monde, les résultats de toutes ces expériences ne permirent nullement de déterminer la vitesse absolue de la terre. Michelson en fut très déçu, mais il trouva tout de même une consolation dans l'invention de son interféromètre, et plus tard il reçut le prix Nobel de physique.

Toute cette histoire vous sera contée et explicitée en deuxième année de licence.

4 La révolution de 1905 :

Advint Albert Einstein, que tous les ouvrages s'emploient à décrire comme un être d'exception et atypique. Cela est juste, mais dans cette case, il n'était pas le premier : Newton, Faraday, Maxwell .... Dans son article de 1905, Einstein réfuta l'idée d'un mouvement absolu. Cela n'était pas nouveau. En effet, nous avons vu que Leibnitz et d'une certaine manière Newton étaient parvenus avant lui à cette conclusion. Cependant, cette idée revenait au goût du jour, alors qu'on s'échinait depuis si longtemps à mesurer la vitesse absolue de la terre. De tout ce qu'il connaissait alors, Einstein tira deux principes qui semblaient s'appliquer sans faille dans les phénomènes naturels y compris dans les expériences d'optique :

- premier principe de la relativité restreinte d'Einstein :

«Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les systèmes de référence qui ne subissent pas d'accélération (référentiels Galiléens).»

qui est une «simple» extension du principe de relativité de Newton ! Si cela est vrai, il apparaît illusoire de tenter de mesurer une vitesse absolue de la terre par des méthodes optiques ou par toute autre méthode physique. Il est donc normal que Michelson n'ait rien vu .

- deuxième principe d'Einstein :

> «Le module de la vitesse de propagation dans le vide de la lumière est indépendant du mouvement de sa source.»

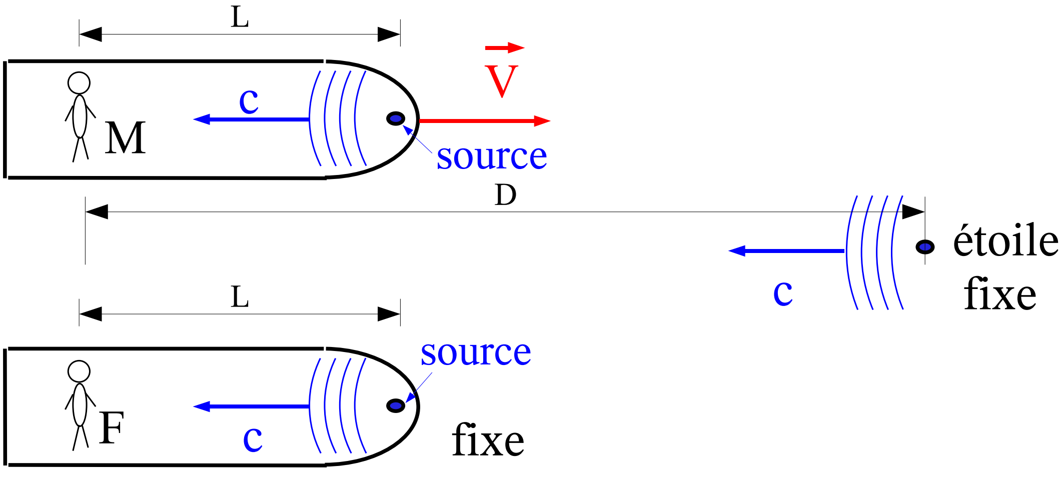
qui découle des équations de Maxwell dans lesquelles, la vitesse de la lumière est une grandeur qui ne dépend que des propriétés du milieu dans laquelle elle se propage et nullement de la vitesse de la source dont elle est issue. Dans le vide la vitesse de la lumière, conventionnellement notée c, est : $c = 299\ 792\ 458\ m\ s^{-1}$ qui est donnée sans incertitude car elle sert de définition du mètre ; un mètre étant la distance parcourue par la lumière dans le vide en $1\ /\ 299\ 792\ 458\ \ s$.

En 1905, Einstein fit deux constatations simples et la science physique explosa ! C'est ce qui est démontré dans les paragraphes qui suivent au travers d'un certain nombre d'expériences dites de pensée, probablement difficiles à réaliser directement même de nos jours, mais qui en toute rigueur pourraient l'être tant elles paraissent simples.

Il est juste de préciser que le premier principe d'Einstein, le principe de relativité, a été simultanément perçu par Henri Poincaré. Certains auteurs (par exemple Feyman) l'attribue du reste à Poincaré. Il n'en reste pas moins vrai que c'est bien Einstein qui le premier a débusqué toute la diablerie physique qui résidait derrière ces deux principes, au premier abord, tout à fait anodins.

5 Constance de la vitesse de la lumière :

Nous nous proposons dans ce qui suit, de mesurer la vitesse de la lumière dans deux vaisseaux spatiaux identiques dont l'un est supposé fixe et l'autre animé d'une vitesse constante $\vec{V}$ par rapport au premier. La mesure est effectuée de deux manières : en interne, par un observateur situé à l'arrière du vaisseau qui mesure le faisceau provenant d'une source lumineuse située à l'avant de son vaisseau et en externe par ce même observateur qui observe une étoile supposée fixe. Ces deux méthodes sont appliquées dans les deux vaisseaux.



Selon le deuxième principe d'Einstein, la lumière en provenance de l'étoile, de la source placée dans le vaisseau fixe ou de celle qui se trouve dans le vaisseau mobile se propage de la même manière, c'est-à-dire vers la gauche de la figure et à la même vitesse c, que l'on cherche à mesurer. On admettra que la vitesse de la lumière dans l'atmosphère des vaisseaux est la même que dans le vide. Si cela ne vous convainc pas, vous pourriez songer à faire l'expérience dans un tube à vide situé dans chaque vaisseau. L'expérience, interprétée selon les principes de la mécanique newtonienne, conduit aux conclusions suivantes :

- dans le vaisseau fixe :
  $ct = L$, où t est le temps que met la lumière pour parcourir L. On mesure alors que la vitesse de la lumière est $c=\frac{L}{t}$. L'observateur F, mesure également $c = \frac{D}{T}$, comme étant la vitesse de la lumière qui lui arrive de l'étoile.

- dans le vaisseau mobile :
  $t' = \frac{L - V t'}{c}$, le temps de propagation semble raccourci car pendant que le faisceau se propage vers l'arrière à la vitesse c, l'observateur M progresse vers l'avant à la vitesse V. La vitesse de la lumière mesurée par M dans son vaisseau est donc : $\frac{L}{t'} = c' = c + V$. L'observation de l'étoile par M conduit à la même conclusion : $\frac{D}{T'} = c' = c + V$.

La vitesse de la lumière mesurée par M est donc supérieure à celle observée par F. Or les expériences internes sont les mêmes. De plus elles sont réalisées dans deux référentiels non accélérés. En vertu du premier principe, les mesures devraient être identiques et elles le sont ! nous dit Michelson. Les concepts de la mécanique newtonienne ne respectent pas ce principe. Il faut donc les modifier . Si c est mesurée par F, c'est donc c que M doit également observer. Et on aboutit à la conclusion suivante, qui heurte assez violemment la loi newtonienne d'addition des vitesses :

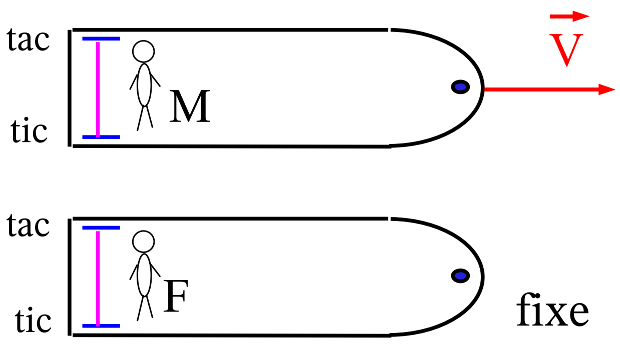
Dans le vide, les ondes d'une source lumineuse se propagent toujours à la même vitesse c pour tous les observateurs non-accélérés.

C'est l'analogue d'une pierre que l'on vous jetterait d'un train, à une certaine vitesse par rapport à celui-ci, et qui vous parviendrait à la même vitesse quelle que soit la vitesse du train. Cela choque nos sens communs.

Un corollaire de cette première conclusion est qu'un observateur - donc un corps matériel - (qui n'est pas composé de lumière) ne peut atteindre la vitesse de la lumière dans le vide, qui émerge de ces nouveaux principes comme une vitesse limite absolue .

On peut déduire cela par un raisonnement par l'absurde : si un observateur matériel se déplaçait - sans accélération - dans le vide à une vitesse supérieure ou égale à c, une signal lumineux ne pourrait plus le rattraper et il serait alors impossible de satisfaire la condition de constance de la vitesse de la lumière pour tous les référentiels non-accélérés.

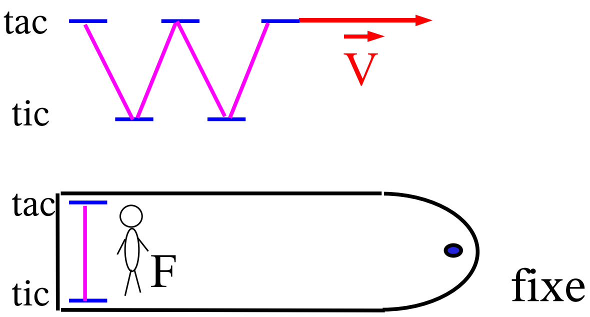
6 Horloges lumineuses – Ralentissement du temps :



Les deux vaisseaux précédents s'équipent d'horloges lumineuses identiques qui mesurent le temps en comptant les tics et les tacs d'un faisceau lumineux qui est réfléchi perpendiculairement entre deux miroirs. Les deux observateurs à l'arrêt synchronisent leurs horloges. Ils se séparent et M passe auprès de F à la vitesse constante V selon la figure ci-dessus. En vertu du premier principe, F et M mesurent la même fréquence d'horloge interne.

Cependant F qui observe l'horloge de M en mouvement voit une chose un petit peu curieuse. Les miroirs de M se déplaçant à vitesse constante, il fait les observations suivantes :

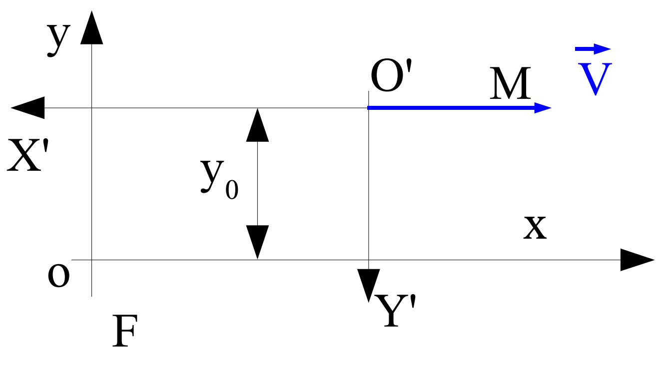
Entre deux battements de l'horloge de M, ses miroirs se déplacent. Ainsi, la distance parcourue par le faisceau lumineux paraît plus grande sur l'horloge de M. Or la vitesse de la lumière est une constante ! Donc il apparaît à F que l'horloge de M (dont les battements sont définis par les réflexions sur les



miroirs) est plus lente que celle dont il est équipé !

La même horloge (les deux observateurs avaient ajusté leurs horloges) apparaît ralentie lorsqu'elle est observée avec une vitesse constante relative. Le temps absolu de Newton en ressort malmené.

Pour en venir aux conclusions sous la forme de mathématiques simples, il faut encore s'assurer – maintenant que nous perdons nos repères newtoniens - que les distances transverses au mouvement ne sont pas altérées lorsqu'on les mesure avec une vitesse relative constante. Pour cela on dote F du repère (0,x,y) (fixe/F) et M du repère (o',x',y') (fixe/M) selon le schéma suivant :

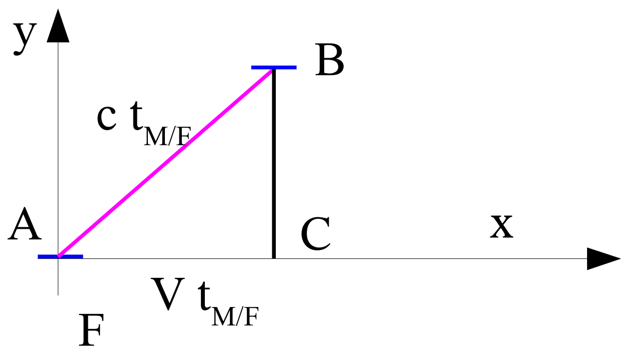


Ces deux repères sont non-accélérés. Ainsi F qui relève les coordonnées de M en utilisant (O,x,y) voit M partir à une vitesse constante V du côté positif de l'axe horizontal. Et M qui fait la même mesure, mais sur les coordonnées de F en utilisant (O',x',y'), en vient aux mêmes conclusions. La hauteur de O' mesurée par F dans (O,x,y) est appelée y_0 . Supposons alors que M mesure une hauteur y_0' (la mesure symétrique et analogue) de l'origine du repère de F telle que : $y_0' < y_0$, puisque ces expériences sont les mêmes (hauteur de O' dans (O,x,y) ou celle de O dans (O',x',y')) et qu'elles sont menées dans deux repères non-accélérés, selon le premier principe, nous devrions aussi conclure que : $y_0 < y_0'$, ce qui est absurde ! Un raisonnement identique – tout aussi absurde - peut être fait pour : $y_o' > y_o$. Il vient donc que la seule façon de satisfaire cette symétrie d'expérience est la condition, bien rassurante : $y_0' = y_0$. Ce qui ce traduit par :

Deux repères inertiels mesurent les mêmes distances dans le plan transverse à leur déplacement relatif.

On peut arriver à la même conclusion en considérant deux tuyaux creux A et B, d'un même diamètre, centrés sur un même axe, se rapprochant à vitesse relative constante sur cet axe. Si les dimensions transverses d'un objet se déplaçant à vitesse constante apparaissaient réduites, un observateur immobile par rapport à l'un des tuyaux (A), verrait l'autre tuyau (B) de diamètre plus petit le pénétrer. Mais pour B, c'est évidemment A qui se déplace à vitesse constante. A devrait alors apparaître plus petit à B et devrait le pénétrer. Cette situation absurde ne peut se résoudre qu'en supposant que les tuyaux gardent le même diamètre, ce qui revient à admettre l'invariance des dimensions transverses à la direction de déplacement relatif.

Venons-en à l'extraction de la loi de ralentissement du temps :



Soit $t_{M/F}$, le temps mesuré par F durant lequel le faisceau de l'horloge de M parcourt AB ; en d'autres termes $t_{M/F}$ est la période de l'horloge de M mais mesurée par F. La distance AC est donnée par V $t_{M/F}$. En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient alors : $BC=t_{M/F}\sqrt{c^2-V^2}$. On doit préciser que la géométrie de l'espace dans lequel nous travaillons est euclidienne, de sorte que le théorème de Pythagore s'applique. Selon le premier principe, la période de l'horloge mobile observée par M est identique à celle de l'horloge de F observée par F. Soit en suivant notre notation : $t_{M/M}=t_{F/F}$ De plus nous savons que BC' = BC (invariance des dimensions transverses au mouvement) , ainsi $t_{M/M}$ est donnée par :

$$c\,t_{M/M}=BC'=BC=t_{M/F}\sqrt{c^2-V^2} \Rightarrow t_{M/M}=t_{F/F}=t_{M/F}\,\gamma^{-1} \text{ avec } \gamma=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Pour $V>0$, $\gamma>1$ donc $t_{F/F}<t_{M/F}$ et l'horloge mobile paraît plus lente à F car sa période semble plus grande.

Ce phénomène est réciproque car M observe que les rayons lumineux de l'horloge de F sont inclinés, alors que les siens lui paraissent verticaux. Il constate que l'horloge de F lui paraît plus lente du même facteur, soit finalement :

$$t_{M/M}=t_{F/F}=t_{M/F}\,\gamma^{-1}=t_{F/M}\,\gamma^{-1}$$

Une horloge se déplaçant à vitesse constante, par rapport à un observateur inertiel, lui apparaît ralentie.

7 Contraction des distances :

Selon le premier principe, les deux vaisseaux que nous avons utilisés précédemment mesurent la même vitesse de la lumière, s'ils réalisent la même expérience interne. F décide maintenant d'effectuer cette mesure sur le vaisseau mobile de M. En utilisant l'horloge de M qui se déplace à vitesse constante par rapport à lui, il constate tout d'abord, d'après ce que nous venons de voir au paragraphe précédent, que le temps mis pour parcourir la distance entre la source du vaisseau mobile et M est $t=t'\sqrt{1-V^2/c^2}$, où $t' = L/c$ est le temps mesuré par M dans son vaisseau. t est plus petit que t' car M apparaît plus lente à F. Or cette expérience «croisée» doit conduire à la même valeur mesurée du module de la vitesse de la lumière qui est une constante de la nature pour un observateur non-accéléré. Pour retrouver la même vitesse, nous devons avoir :

$$c = \frac{L}{t'} = \frac{d}{t} = \frac{d}{t'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \Rightarrow\ d = L\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$ où d est la distance de parcours relevée par F sur M

F constate alors que les distances relevées sur le vaisseau mobile dans le direction du mouvement relatif sont contractées par rapport aux valeurs données par M.

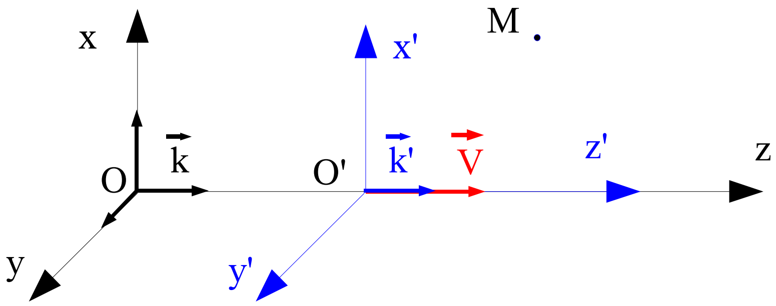
Les distances mesurées par un observateur inertiel, sur un corps en mouvement relatif non-accéléré, lui apparaissent contractées dans le sens longitudinal du mouvement.

Cet effet est réciproque : c'est-à-dire qu'il est identiquement constaté par F qui mesure dans M ou M qui observe F.

Dans certains ouvrages, cet effet porte le nom de contraction de FitzGerald-Lorentz, car ce sont eux qui les premiers avaient observé que l'on pouvait expliquer l'échec de l'expérience de Michelson en admettant une contraction de la sorte des objets dans le sens de leur déplacement. Cependant, ceux-ci utilisaient le concept d'éther avec lequel ils ne pouvaient pas parvenir aux mêmes conclusions quant à l'observation relative de cette contraction (F/M ou M/F) ; ils supposaient que V était la vitesse absolue de l'objet dans l'éther. Que l'on aboutisse au même effet n'est pas une totale coïncidence, mais les concepts développés sont radicalement différents et n'ont pas du tout la même portée générale. FitzGerald et Lorentz n'avaient pas osé mettre en cause la mécanique newtonienne.

8 Transformation de Lorentz :

Cette transformation établit le changement de coordonnées d'un point M de l'espace observé par deux observateurs inertiels en mouvement relatif. Chaque observateur possède son propre repère fixe, selon la figure suivante :



Les coordonnées de M mesurées par O à l'aide de son repère sont (t, x_M , y_M , z_M). Elles deviennent (t', x_M' , y_M' , z_M') lorsqu'elles sont données par O' en utilisant (o',x',y',z') .

O qui observe O' note une contraction des distances dans la direction de z. z_M' apparaît donc contractée à O. Par ailleurs, x_M et y_M qui se trouvent dans le plan transverse au mouvement ne subissent aucune distorsion. Et enfin nous savons que le point O' se déplace à la vitesse V selon (O,z) (on supposera qu'à t=0 il se trouve à z=0). En rassemblant toutes ces remarques, on aboutit à :

$$z_M = z_M' \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} + V\ t \ , (8.1)$$

et en notant que la contraction des distances longitudinales est réciproque et que O se déplace à la vitesse -V selon (O',z') par rapport à O', on obtient :

$$z_M' = z_M \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - V\ t' \ . (8.2)$$

À partir de ces deux relations, il n'est pas difficile de montrer qu'on obtient la transformation suivante:

$$z_M' = \gamma (z_M - V\ t)\ ;\ x_M' = x_M\ ;\ y_M' = y_M\ .$$

De (8.1) on tire : $\frac{z_m'}{\gamma} = z_m - V t$, et de (8.2) : $\frac{z_m'}{\gamma} = \frac{z_m}{\gamma^2} - \frac{V}{\gamma} t'$, d'où :

$z_m - V t = \frac{z_m}{\gamma^2} - \frac{V}{\gamma} t' \ \Rightarrow\ z_m \frac{V^2}{c^2} - V t = -\frac{V}{\gamma} t'$, qui donne finalement :

$$t' = \gamma (t - z_M \frac{V}{c^2})\ .$$

En introduisant les grandeurs relativistes suivantes:

$\beta=\dfrac{V}{c}$ et $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$ (on notera que $0\leqslant\beta<1$), on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} z'_M&=\gamma(z_M-\beta\, c t)\\ c\, t'&=\gamma(c\, t-\beta\, z_M)\\ x'_M&=x_M\\ y'_M&=y_M \end{aligned}}$$

Ces équations portent le nom de transformation de Lorentz (qui le premier avait remarqué que les équations de l'électromagnétisme de Maxwell étaient invariantes sous les transformations de ce type). Dans cette formulation, il apparaît clairement que les coordonnées ct et z_M jouent des rôles identiques. c étant une constante fondamentale, on adopte souvent - en particulier en physique des hautes énergies (des grandes vitesses) - la convention c=1 (sans unité) qui simplifie les formules mais embrouille un peu les étudiants à leur début. Nous ne le ferons pas ici. Quand on passe de O à O', on mélange ct et z_M , un peu de la même manière que lorsque l'on applique une rotation d'espace à M on mélange x, y et z. Dans un espace où le temps (ct) apparaît comme une vraie coordonnée supplémentaire (donc à 4 dimensions), la transformation de Lorentz est une simple opération géométrique !

Il est intéressant d'étudier ce qu'il advient de cette transformation aux faibles vitesses, c'est-à-dire lorsque $\beta\ll 1$ *soit* $\beta\approx 0$, on a alors :

$$\gamma\approx 1 \text{ , } \beta c\ t=\frac{V}{c}c\ t=V t \text{ alors que } \beta z_M=0 \text{ (si } z_M \text{ n'est pas trop loin de O) ,}$$

ce qui permet d'obtenir cette expression simplifiée :

$$\begin{aligned} z'_M&=z_M-V\ t\\ t'&=t\\ x'_M&=x_M\\ y'_M&=y_M \end{aligned} \quad ,$$

qui n'est autre que la transformation de Galilée (de Newton). La limite aux faibles vitesses de la mécanique relativiste est la mécanique newtonienne.

9 Loi de composition relativiste des vitesses :

Un point M qui se déplace dans le repère (O',x',y',z') du paragraphe 8 à une vitesse longitudinale $\vec{U}_L$ portée par (O',z') et orientée dans le sens positif, possède pour O' l'ensemble de coordonnées suivantes :

$x'_M=cte$; $y'_M=cte$ et $z'_M(t')=U_L t'$, on suppose ici qu'à t'=0 , $z'_M = 0$.

Nous savons maintenant que les coordonnées de M dans O, en fonction de celles connues dans O', sont données par :

$$\begin{aligned} z_M&=\gamma(z'_M-\beta'\ c t')\\ c\ t&=\gamma(c\ t'-\beta'\ z'_M)\\ x_M&=x'_M\\ y_M&=y'_M \end{aligned} \quad .$$

β' est donné par la vitesse de O qui s'éloigne de O' longitudinalement à la vitesse V mais dans le sens opposé à $\vec{k'}$ donc à une vitesse négative -V. On obtient donc :

$$\begin{matrix} z_M = \gamma(z'_M + \beta\, c\, t') \\ c\, t = \gamma(c\, t' + \beta\, z'_M) \end{matrix} \text{ avec } \beta' = -\beta = -V/c \ .$$

La vitesse ω_L du point M mesurée par O est donnée par $d(z_M)/d(t)$, c'est-à-dire :

$$\omega_L = \frac{c\gamma(dz'_M + \beta\, c\, dt')}{\gamma(c\, dt' + \beta\, dz'_M)} = \frac{c\gamma(\frac{dz'_M}{dt'} + \beta\, c)}{\gamma(c + \beta\, \frac{dz'_M}{dt'})} = \frac{c(U_L + \beta\, c)}{(c + \beta\, U_L)} = \frac{c(U_L + V)}{(c + \frac{V U_L}{c})} = \frac{(U_L + V)}{(1 + \frac{V U_L}{c^2})}$$

qui aux basses vitesses redonne bien $\omega_L = U_L + V$ car $\frac{V U_L}{c^2} \approx 0$. De plus, $\omega_L = c$ lorsque $U_L = c$.

Notez que U_L n'est pas nécessairement constante.

Si M a une vitesse transverse dans O' (dans le plan (O',x',y')), il faut se garder de conclure que la vitesse transverse mesurée dans O est identique ! Regardons cela en détail. Les coordonnées de M dans O' sont alors :

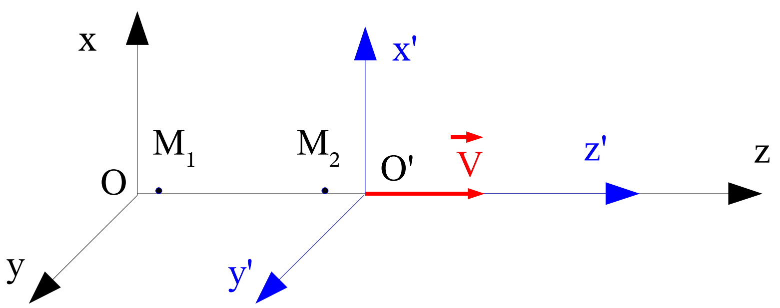
$$x'_M(t') = U_T\, t' \ ;\ y'_M = cte \quad et \quad z'_M = cte$$, ce qui se traduit par :

$$\begin{matrix} z_M = \gamma(z'_M + \beta\, c t') \\ c\, t = \gamma(c\, t' + \beta\, z'_M) \\ x_M = U_T\, t' \end{matrix}$$, desquelles on tire : $\omega_L = \frac{d z_M}{d t}$ et $\omega_T = \frac{d x_M}{d t}$ soit encore :

$$\omega_L = \frac{d z_M}{d t} = \frac{\gamma\, \beta c\, d t'}{\gamma\, dt'} = \beta c = V \text{ et } \boxed{\omega_T = \frac{d x_M}{d t} = \frac{U_T\, d t'}{\gamma\, dt'} = \frac{U_T}{\gamma}}$$

On peut noter ici que si $U_T = c$, alors $\omega_T < c$! C'est normal car c'est $\omega = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_T^2}$ qui doit être égale à c ; et c'est bien le cas .

10 Notion relative de la simultanéité :



Soient deux événements M_1 et M_2 observés au même instant dans O, tels que $x_{M1} = y_{M1} = x_{M2} = y_{M2} = 0$, pour $t_1 = t_2$ et $z_{M1} \neq z_{M2}$. Étudions ce qu'il advient des temps dans O' , c'est-à-dire :

$$c\, t'_1 = \gamma(c\, t_1 - \beta\, z_{M1}) \text{ ainsi que } c\, t'_2 = \gamma(c\, t_2 - \beta\, z_{M2}) \ ,$$

ce qui conduit à : $c\,(t'_1 - t'_2) = \gamma(c(t_1 - t_2) - \beta(z_{M1} - z_{M2})) = \gamma\, \beta\,(z_{M2} - z_{M1}) \neq 0$!

Ce qui signifie que des événements qui se produisent au même instant mais à une distance non-nulle dans O, n'apparaissent plus simultanés dans O' . En mécanique relativiste, la simultanéité acquiert un aspect relatif !

Physiquement, on peut comprendre cet effet de la façon suivante : supposons que vous vous trouvez au repos et situé juste au milieu de M1 et M2. Au même instant, un éclair lumineux est émis par chaque point. Ils vous parviendront au même moment. Vous observez donc que ces deux événements sont simultanés. Supposez maintenant que vous vous rapprochez à vitesse constante de l'un des points. Vous reprenez l'expérience, c'est-à-dire qu'au même instant dans O (fixe) un éclair est émis par chaque point. Vous noterez alors que l'éclair qui provient du point vers lequel vous vous dirigez vous parvient avant l'autre, car la vitesse de la lumière est finie et pendant que l'éclair vous parvient, vous vous déplacez. En mouvement, ces événements ne vous paraissent plus simultanés.

11 Quadri-vecteurs et espace-temps :

Hermann Minkowski - qui avait été le professeur de mathématique d'Einstein à Zurich (Minkowski qualifiait Einstein d'étudiant paresseux!) - fit en 1907 une constatation qui est à la base de l'interprétation géométrique de la relativité. C'est cette interprétation qu'il faut retenir pour aller plus loin dans l'étude de la physique du XX$^{\text{ème}}$ siècle (relativité générale, physique des interactions fondamentales ...) . On peut considérer que c'est Minkowski qui a achevé l'établissement de la relativité restreinte.

Nous avons mentionné au paragraphe 8, que la transformation de Lorentz s'apparente à une rotation d'un caractère un peu spécial, dans un espace à 4 dimensions (temps et espace spatial). En 1907, Minkowski remarque qu'on peut généraliser la notion de vecteur servant au repérage d'un point dans l'espace euclidien à 3 dimensions. Il propose de repérer un événement (un point dans l'espace à 4 dimensions) par ses coordonnées (ct, x, y, z) dans un nouvel espace à 4 dimensions (espace-temps ou espace de Minkowski) qui serait le véritable espace physique dans lequel nous vivons. Le temps acquiert ainsi le même statut que les autres dimensions d'espace. La transformation de Lorentz - décrite au paragraphe 8 - par sa symétrie entre ct et z le montre bien. De la même manière que les rotations d'espace laissent la norme des vecteurs d'espace invariante (c'est-à-dire $r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=r=\sqrt{x^2+y^2+y^2}$, où r' est la norme de $\vec{r}$ après rotation), les transformations de Lorentz ne changent pas la grandeur suivante :

$$\boxed{s^2=c^2\,t^2-x^2-y^2-z^2=c^2\,t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=s'^2}.$$

s est appelé l'intervalle entre deux événements (ici entre M et l'origine à t=0). Un événement dans l'espace de Minkowski est représenté par son quadri-vecteur (ct, x, y, z) . C'est l'extension à quatre dimensions des trois coordonnées de l'espace d'Euclide.

D'une manière générale un quadri-vecteur Q comporte quatre composantes conventionnellement notées :

$(Q_{0,}\vec{Q})$ ou encore $(Q_{0,}Q_x,Q_y,Q_z)$, Q_0 est la composante temporelle, et $\vec{Q}$ le vecteur spatial.

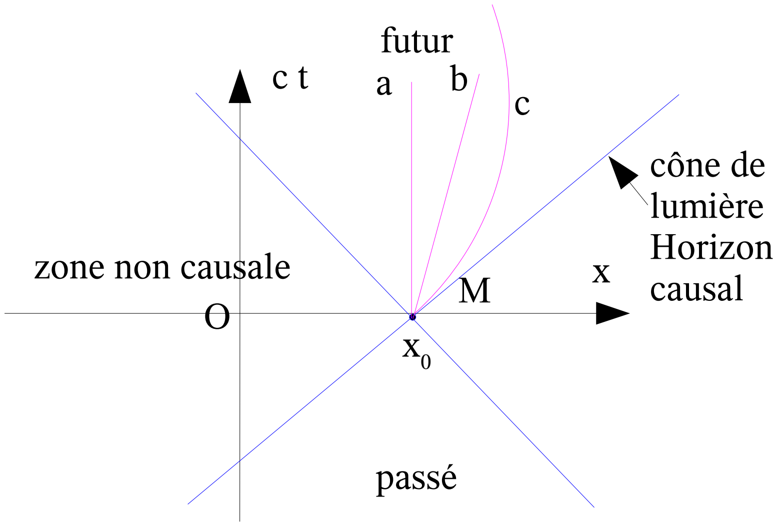
Les coordonnées d'un quadri-vecteur changent quand on passe d'un repère inertiel à un autre. Les modifications de ses coordonnées sont calculées en utilisant la transformation de Lorentz :

$$\boxed{\begin{array}{l} Q'_z=\gamma(Q_z-\beta\,Q_0) \\ Q'_0=\gamma(Q_0-\beta\,Q_z) \\ Q'_x=Q_x \\ Q'_y=Q_y \end{array}}$$ qui ne modifie pas la norme du quadri-vecteur, $\boxed{Q=Q'=\sqrt{Q_0^2-Q_x^2-Q_y^2-Q_z^2}}$.

dans laquelle $\beta=\dfrac{V}{c}$ caractérise le mouvement à vitesse constante de O' par rapport à O, ici selon l'axe

(0,z).

S'il est difficile de représenter graphiquement un mouvement dans l'espace euclidien, il l'est encore plus lorsque l'on travaille dans l'espace de Minkowski. On utilise alors des diagrammes, dits de Minkowski, très simplifiés dans lesquels l'axe vertical représente la dimension temporelle et l'axe horizontal l'une des dimensions spatiales en supposant que les deux autres ont des comportements symétriques.



Un point M se trouve en $x=x_0$ à t=0 dans l'Univers. Étudions quelques cas types de ses possibles trajectoires :

- a) si M est immobile, M suit une ligne «verticale» dans l'Univers ;
- b) si M suit un mouvement uniforme dans l'espace euclidien, $x(t)=\frac{V}{c}ct+x_0=\beta\ ct+x_0$, sa ligne d'Univers est une droite inclinée dont la pente β reste inférieure à 1 , si le point est matériel ;
- c) si M part à grande vitesse puis ralentit, sa ligne d'Univers est une courbe ;
- enfin, si M représente l'évolution d'un signal lumineux dans l'Univers, $x(t)=ct+x_0$, sa ligne d'Univers est une droite inclinée à 45^0 . Cette droite (à deux puis à trois dimensions spatiales) définit ce que l'on appelle le cône de lumière ou l'horizon causal.

On note que les lignes d'Univers (trajectoires dans l'espace de Minkowski) de particules matérielles libres - sur lesquelles ne s'appliquent aucune force - sont des droites dont les pentes p sont telles que $-1<p<1$. C'est la formulation relativiste du premier principe de Newton.

Puisque la vitesse de la lumière constitue une limite absolue, il n'est pas possible que M partant de x_0 à t=0 puisse se rendre dans la partie située à l'extérieur du cône de lumière (ou de l'horizon causal). Réciproquement, aucun signal ne pourra parvenir à M en provenance de l'extérieur du cône de lumière. Le demi-cône de lumière des temps négatifs est appelé le passé causal. Un événement s'étant produit dans cette zone peut avoir influencé le présent (t=0) de M. L'autre demi-cône représente le futur causal. M peut prétendre influer sur le devenir des événements qui s'y dérouleront. Il est amusant de noter ici que si nous savions déjà que les devins qui prétendent avoir une connaissance du futur sont des charlatans, ceux qui déclareraient après Einstein être bien au fait du présent, le sont tout autant ! Il suffit de jeter un coup d'oeil sur l'axe x à t=0 (le présent de M) , pour comprendre que le présent échappe à M.

Si un observateur est placé sur une particule matérielle et qu'il suit son déplacement , l'intervalle qu'il mesure le long de la trajectoire de cette particule dans son repère interne est tout simplement : $\int ds = c\, t_{propre}$, car la vitesse de la particule pour cet observateur est nulle et ses coordonnées sont : (0,0,0). Pour cet observateur, $\boxed{t_{propre} = \frac{\int ds}{c}}$ représente le temps propre (interne) de cette particule, celui qu'elle mesure grâce à son horloge interne. Pour vous, ce temps propre, c'est votre âge.

Il faut bien réaliser que dans les diagrammes de Minkowski, les «longueurs» dessinées des lignes d'Univers ne représentent absolument pas les temps propres des corps. Par exemple, pour un rayon lumineux qui se déplace à la vitesse de la lumière, s vaut 0 en tout point de sa ligne d'Univers. Plus on se rapprochera du cône de lumière et plus cette différence se fera sentir.

Pour finir, nous noterons que si deux événements de l'Univers sont séparés par un intervalle au carré qui est négatif (oui c'est possible car c'est une différence de carrés), ces événements n'ont pas de lien causal. Inversement, si leur intervalle au carré est positif, alors l'un peut influer sur l'autre. Un intervalle négatif est dit de genre espace. Un intervalle positif est de genre temps.

12 Masse, énergie totale et quantité de mouvement :

La définition de la masse d'un corps matériel a considérablement évoluée depuis le XVIII^{ème} siècle. La définition moderne est simple :

La masse m d'un corps matériel est égale à son énergie totale divisée par le carré de la célérité de la lumière dans le vide, lorsque celui-ci est observé au repos. $\boxed{m c^2 = E^0_{tot}}$, où E^0_{tot} est l'énergie totale du corps mesurée dans un référentiel inertiel où celui-ci apparaît au repos. Notez la présence indispensable de l'indice 0 dans l'expression.

Cette définition sera mieux amenée dans le paragraphe 14, après avoir décrit l'équation fondamentale de la dynamique relativiste. Elle a pour conséquence que la masse des particules qui voyagent à la vitesse de la lumière (exemple : les photons), qui de fait ne peuvent être observées au repos, ont nécessairement une masse nulle. Cela ne signifie pas pour autant qu'une particule de masse nulle porte une énergie nulle, car elle n'est jamais observée au repos !

En physique subatomique, on se permet même de simplifier encore un peu plus cette définition, car on utilise le système d'unités dans lequel c=1. La masse d'un corps n'est donc pas autre chose que son énergie totale au repos . Mais nous ne poursuivrons pas dans ce système qui donne un peu le tournis aux étudiants (à leur début).

Cette définition est la seule que vous devez retenir. Toutes les autres entretiennent des confusions regrettables qu'il est préférable d'oublier.

Il ressort de cette définition que la masse d'un système est constante si le système reste isolé (sans échange d'énergie d'aucune sorte).

L'énergie totale d'un corps désigne toute l'énergie qu'un corps détient quelle qu'en soit sa forme : cinétique, potentielle, thermique, électrique, magnétique, de liaison , radiative, son énergie au repos (sa masse) ...

Une particule matérielle est caractérisée dans l'Univers par son quadri-vecteur événement (sa position dans l'espace-temps), sa masse et, si nous l'observons dans un repère où elle se déplace, par sa vitesse. Plutôt que sa vitesse, nous préférerons utiliser en premier lieu sa quantité de mouvement qui est une grandeur vectorielle reliée à la vitesse.

En relativité, l'énergie totale et la quantité de mouvement d'une particule forment le deuxième quadri-vecteur qui caractérise une particule. Ainsi une particule matérielle de masse m est représentée par deux quadri-vecteurs :

$$\boxed{R=(ct,\vec{r})=(ct,x,y,z) \quad et \quad P=(E_{tot},c\vec{p})=(E_{tot},c\ p_x,c\ p_y,c\ p_z)}\ .$$

Aussi puisque dans son repère propre O', le quadri-vecteur P' de la particule est donné par : $P'=(mc^2,0,0,0)$, car la particule est au repos dans ce repère. Dans un autre référentiel inertiel en mouvement par rapport à O' selon son axe (O',z') dans le sens des z' négatifs, le quadri-vecteur P sera donné par le résultat de la transformation de Lorentz qui lie les deux repères, appliquée à P', soit :

$$\begin{aligned} c\,p_z &= \gamma(0+\beta\ mc^2)=\gamma\,\beta\,mc^2 \\ E_{tot} &= \gamma(mc^2+\beta\cdot 0)=\gamma\,mc^2 \\ c\ p'_x &= 0 \\ c\ p'_y &= 0 \end{aligned}$$

qui avec $p=\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}$, permet de trouver :

$$\boxed{\begin{aligned} E_{tot} &= \gamma\,m\,c^2 \\ \vec{p} &= \gamma\,m\vec{V} \end{aligned}}\ .$$

La première de ces équations ressemble à ce que tout le monde connaît de l'oeuvre d'Einstein ; mais pas tout à fait ! Et la différence est notable. Vous rencontrerez souvent la notation $E_{tot}=mc^2$ étant sous-entendu que m, qui désigne ici la masse relativiste, est reliée à la masse véritable par $m=\gamma\,m_0$ où m_0 est appelée la masse au repos, c'est-à-dire la masse que nous avions définie jusqu'ici. **Il est très vivement recommandé de ne pas faire usage de ces définitions multiples de la masse qui entretiennent l'ambiguïté sans apporter d'aide aux étudiants.**

On peut aisément montrer que le rapport des équations précédentes donne : $\boxed{c\ \vec{p}=E_{tot}\dfrac{\vec{V}}{c}=E_{tot}\ \vec{\beta}}$

Nous savons de plus qu'une transformation de Lorentz ne change rien à la norme d'un quadri-vecteur. Appliqué à P, cela donne :

$$P'^2=m^2c^4=P^2=E_{tot}^2-p^2c^2 \text{ soit } \boxed{E_{tot}^2=m^2c^4+p^2c^2}\ .$$

Cette expression reste vraie même lorsque la particule en question est immatérielle, c'est-à-dire s'il s'agit d'un photon (particule de lumière) dont la masse est nulle ! On obtient alors simplement : $E_{tot}=pc$.

Pour finir, nous définissons l'énergie cinétique T d'une particule qui est donnée par l'expression suivante :

$\boxed{E_{tot}=mc^2+T}$. En l'absence d'énergie potentielle, l'énergie gagnée par une particule lorsqu'elle acquiert de la vitesse (énergie cinétique) s'ajoute à son énergie au repos pour calculer son énergie totale.

$T=E_{tot}-mc^2=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}-mc^2=mc^2\sqrt{1+\dfrac{p^2c^2}{m^2c^4}}-mc^2=mc^2(\sqrt{1+(\gamma\,\beta)^2}-1)$, qui, aux petites vitesses, $(\gamma\,\beta\ll 1)$ donne $T\approx mc^2(1+\dfrac{1}{2}(\gamma\,\beta)^2-1)=\dfrac{1}{2}mc^2(\gamma\,\beta)^2=\dfrac{1}{2}mc^2(1\dfrac{V}{c})^2=\dfrac{1}{2}mV^2$, qui n'est autre que la définition classique de cette grandeur .

13 Dynamique relativiste :

Avec les forces externes qui agissent sur un système, la quantité de mouvement sont les grandeurs physiques qu'il faut utiliser pour résoudre un problème de dynamique relativiste . Le Principe Fondamental de la Dynamique reste valable à condition de l'écrire sous cette forme :

$\boxed{d\vec{p} = (\sum \vec{F}_{ext})\, dt}$, mais attention au temps et aux forces qui ne sont plus invariables dans un changement de repères !

On constate ainsi qu'un système isolé, c'est-à-dire qui n'est soumis à aucune force ni aucun signal extérieur, conserve sa quantité de mouvement au cours du temps. C'est comparable à ce que nous avions obtenu en mécanique newtonienne. Mais en mécanique relativiste, l'énergie totale est également conservée au cours du temps quelle que soit l'évolution d'un système, du moment qu'il reste isolé.

En résumé, on peut simplement dire que le quadri-vecteur énergie-quantité de mouvement d'un système isolé reste constant au cours du temps.

Avec la définition usuelle de l'accélération, $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ et les grandeurs relativistes introduites dans les paragraphes précédents $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$, on obtient :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma\, m\vec{V})}{dt} = m\gamma\frac{d\vec{V}}{dt} + m\vec{V}\frac{d\gamma}{dt} = m\gamma\vec{\Gamma} + m\gamma^3(\vec{\beta}\cdot\vec{\Gamma})\vec{\beta} = \vec{F} \quad (13.1)\text{ , où } \vec{F} = \sum \vec{F}_{ext} \;.$$

Et en multipliant par $\vec{\beta}$ de part et d'autre de cette équation :

$$\vec{F}\cdot\vec{\beta} = m\gamma\,\vec{\Gamma}\cdot\vec{\beta} + m\gamma^3\,\beta^2\,\vec{\Gamma}\cdot\vec{\beta} = m\gamma\,\vec{\Gamma}\cdot\vec{\beta}\,(1+\gamma^2\,\beta^2) = m\gamma^3\,\vec{\Gamma}\cdot\vec{\beta} \;,$$

soit en utilisant ceci dans 13.1 ,

$$\boxed{\vec{F} - (\vec{F}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta} = m\gamma\vec{\Gamma}} \;. \;(13.2)$$

On constate alors que l'accélération n'est plus colinéaire à la résultante des forces extérieures, comme cela était le cas en mécanique newtonienne. Elle possède une composante qui est dirigée selon la vitesse. De plus si :

- $\vec{F}$ est $\perp$ à la vitesse, alors $\vec{F} = m\gamma\vec{\Gamma}$
- $\vec{F}$ est $\|$ à la vitesse, alors $\vec{F} = m\gamma^3\vec{\Gamma}$.

Si on tente de définir la masse inertielle d'un corps comme le rapport de la force qui lui est appliquée sur l'accélération qui en résulte, on note qu'en mécanique relativiste, celle-ci n'a pas la même valeur selon que la force est longitudinale ou transverse au mouvement. En toute rigueur, cette définition n'a donc pas de sens.

On peut tenter d'établir une définition gravitationnelle de la masse, mais on montre en relativité générale que celle-ci conduit également à des incohérences.

Ainsi, pour la masse d'un corps, il est préférable de ne retenir que la définition donnée au paragraphe 12.

L'équation (13.2) de la dynamique relativiste est la base des calculs qui permettent de concevoir les accélérateurs de particules tels que ceux qui sont construits au CERN à Genève. Dans le collisionneur à protons (LHC) qui est en cours de construction, les protons seront accélérés à une énergie totale de 7

TeV (1 TeV = 10^{12} eV sachant que 1 eV = 1,6 10^{-19} J) , soit une vitesse donnée par :

$E_{tot}^{p}=\gamma\, m_{p}c^{2}\Rightarrow\gamma=E_{tot}^{p}/m_{p}c^{2}\Rightarrow\beta=\sqrt{1-(\frac{m_{p}c^{2}}{E_{tot}^{p}})^{2}}$, sachant que $E_{tot}^{p}=7000\ GeV$ et $m_{p}c^{2}=0{,}938272\ GeV$, on obtient : $\beta=\frac{V}{c}=0{,}999999991$, c'est-à-dire presque la vitesse de la lumière . Ici les particules sont dites ultra-relativistes .

14 Retour sur l'énergie de masse au repos :

Soit un repère inertiel dans lequel une particule matérielle de masse m, animée d'une vitesse $\vec{V}$ et soumise à une force $\vec{F}$. Le travail infinitésimal de $\vec{F}$ est donné par :

$dW=\vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM}$, soit encore :

$$dW=\vec{F}\cdot\vec{V}\,dt=\vec{F}\cdot\vec{\beta}\,c\,dt=m\gamma^{3}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\beta}\,c\,dt=m\gamma^{3}\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{V}\,dt=m\gamma^{3}\,d\vec{V}\cdot\vec{V}=d(\gamma\, m\,c^{2})\ .$$

En application du théorème de l'énergie cinétique, ce travail infinitésimal est égal à la variation infinitésimale de l'énergie cinétique :

$dW=dT=d(\gamma\, m\, c^{2})$, ce qui conduit à : $T=\gamma\, m\, c^{2}+Cte$. Or à vitesse nulle, l'énergie cinétique est nulle. À vitesse nulle, $\gamma=1$, ce qui requiert : $Cte=-m\, c^{2}$, d'où finalement : $T=m\, c^{2}(\gamma-1)$.

Au repos, un corps matériel possède une énergie totale égale au produit de sa masse par le carré de la célérité de la lumière dans le vide.

À une constante près (c^2), la masse d'un corps matériel est donc égale à son énergie totale au repos. C'est la meilleure définition que nous ayons de la masse d'un corps en physique.

15 L'histoire ne s'arrête pas là !

Ceux qui pourraient songer qu'Einstein aurait pu se sentir satisfait «d'avoir remis à l'heure quelques pendules» lumineuses, déguster les fruits de son succès et jouir de sa notoriété naissante en seront pour leurs frais. La relativité ne faisait que naître et sa «généralisation» allait amener bien d'autres bouleversements au cours du XX^{ème} siècle concernant, par exemple, la géométrie de notre Univers et son évolution.

Lors de la révolution de 1905, Einstein avait démontré qu'un signal physique ne pouvait pas se propager à une vitesse supérieure à celle de la lumière dans le vide. Les forces de gravitation de Newton qui s'exercent entre deux masses distantes devaient nécessairement être corrigées, car le mouvement de l'une de ces masses ne pouvait être instantanément perçu par l'autre (Newton l'avait deviné, voir paragraphe 2).

Einstein eut alors un nouveau trait de génie. À partir de la loi de la chute des corps énoncée par Galilée quelques siècles auparavant, il remarqua ce fait curieux. Dans une référentiel en chute libre dans un champ de pesanteur (exemple : champ de pesanteur terrestre), tout se passe comme si les forces de gravitation étaient éliminées ! Nous savons qu'en l'absence de frottement (dans le vide) et si la masse grave d'un corps est égale à sa masse inertielle, tous les corps chutent avec la même accélération : $\vec{g}$. En effet , dans un champ de pesanteur, nous pouvons écrire :

$\vec{F}=m_{g}\vec{g}=m_{i}\vec{\Gamma}$, où m_{g} est la masse grave (qui intervient dans la définition de la force de pesanteur) et m_{i} est la masse inertielle qui apparaît dans l'équation de la dynamique. Si $m_{g}=m_{i}$ (ce qui est vérifié expérimentalement avec une précision d'une partie pour 1000 milliards), $\vec{\Gamma}=\vec{g}$ quel que soit l'objet en chute libre. Un référentiel lié à un petit laboratoire (songez à un ascenseur) en chute libre dans le champ de pesanteur n'observe plus de force de gravitation exercée sur les objets de ce laboratoire. Or cette situation est équivalente à ce qui se passerait si le même petit laboratoire était situé très loin de tout astre massif, c.-à-d. en l'absence de toute gravitation. On constate alors que la gravitation peut être éliminée par un simple changement de référentiel (en passant dans un référentiel accéléré en chute libre) et que l'observateur «normal» (l'équivalent de notre petit laboratoire de l'espace profond) n'est finalement pas celui que l'on croît. Il faut noter ici que la gravitation est la seule des forces connues que l'on puisse éliminer par un simple changement de référentiel. Cela ne marche pas pour les forces électrostatiques, par exemple. Qui dit changement de référentiel, dit transformation géométrique dans l'espace-temps à 4 dimensions (pensez à la transformation de Lorentz dans l'espace de Minkowski qui permet de passer d'un référentiel galiléen à un autre). La gravitation est donc liée aux propriétés géométriques de l'espace-temps qui est lui-même modifié par la présence de matière. Les mathématiques nécessaires pour formuler la théorie de la relativité générale sont d'un niveau bien supérieur à celui de la première année d'université.

Elles introduisent les notions de transport, de mesure et de parallélisme de vecteurs dans un espace courbe (pensez à un vecteur que l'on glisse sur la surface d'une sphère, le même vecteur glissant sur cette surface change du fait de la courbure, ou un déplacement sur une ligne de moindre parcours du nord au sud sur cette sphère). Nous nous arrêterons donc là, en vous invitant à vous rendre aux prochains épisodes.

16 Pour en savoir plus :

- Histoire d'une grande idée, la relativité : Baresh Hoffmann , pour la Science, diffusion Belin
- Cours de mécanique tome 1 , Richard Feynman , InterEditions
- Relativité restreinte, bases et applications, Claude Semay et Bernard Silvestre-Brac, Dunod
- Albert Einstein's special theory of relativity, A. Miller , Springer
- Concept of mass, Okun, Physics Today , Juin 1989 page 31
- Concept of mass (mass, energy and relativity), Okun, Sov. Phys. Usp. 32(7) , 1989 , p. 629
- Sur les épaules des Géants : Les plus grands textes de physique et d'astronomie, Dunod