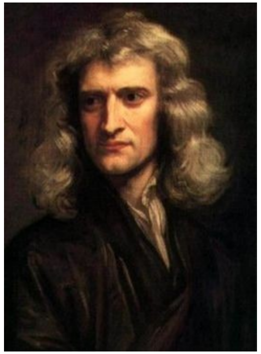
Principes fondamentaux de la dynamique

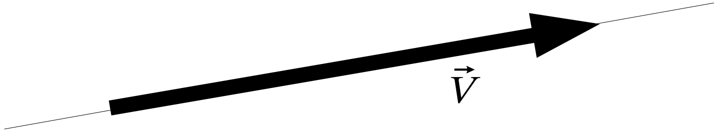
« Si j'ai vu si loin, c'est parce que je me tenais

sur les épaules de géants »

Isaac Newton 1642-1727



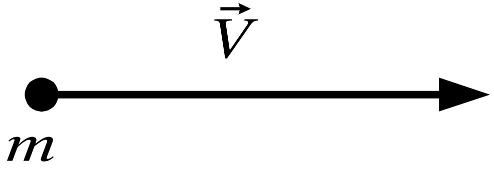
En formulation vectorielle dans l'espace euclidien homogène et isotrope ;
Vecteur dans l'espace euclidien à 3 dimensions = 3 nbres sur trois axes
ou 1 direction , un sens et un module ,



$$\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$$

Quantité de mouvement (momentum en anglais) d'un point matériel de masse m

Introduite par Newton :
Définition II des Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle



$$\boxed{\vec{P} = m\ \vec{V}}$$

vecteur quantité de mvt

masse

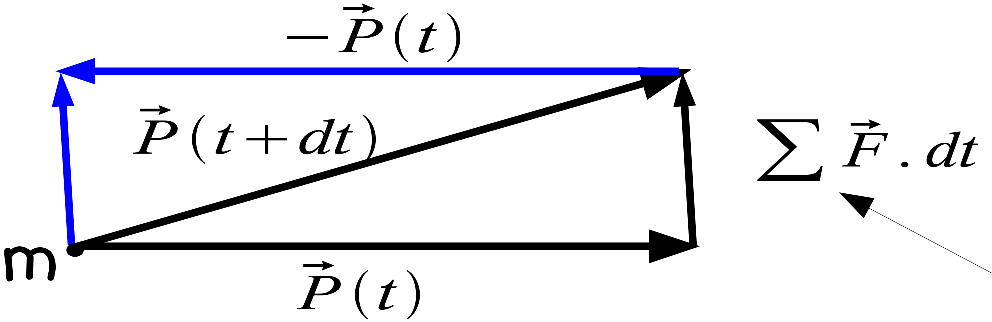
vecteur vitesse (velocity)

$$[P] = [m]\cdot[V] = \mathbf{kg\ m\ s^{-1}}$$

Cette quantité mesure la propension d'un corps à garder son mouvement

Penser à un joueur de rugby !

Principe Fondamental de la Dynamique : PFD



Somme ou résultante des forces agissant sur le point de masse m

dt : un laps de temps infinitésimal mais non nul

$$\vec{P}(t+dt)-\vec{P}(t)=\boxed{d\vec{P}=\sum \vec{F}\,dt}$$ forme différentielle

dérivée : $\boxed{\dfrac{d\vec{P}}{dt}=\sum \vec{F}}$ $\quad [F]=N=[P][t]^{-1}=kg\;m\;s^{-2}$

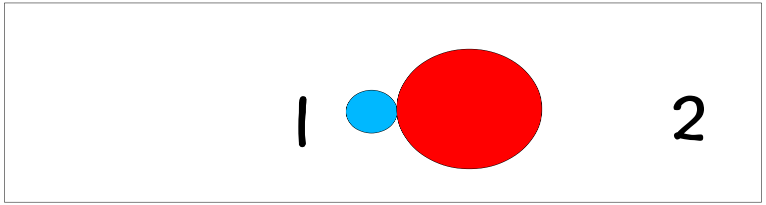
Ce principe n'est valable que dans un référentiel Galiléen, c-à-d un référentiel non accéléré.

Principe de l'action et de la réaction

Quand deux objets 1 et 2 interagissent :

$\vec{F}_{2/1}$ $\vec{F}_{1/2}$

alors : $\boxed{\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}}$



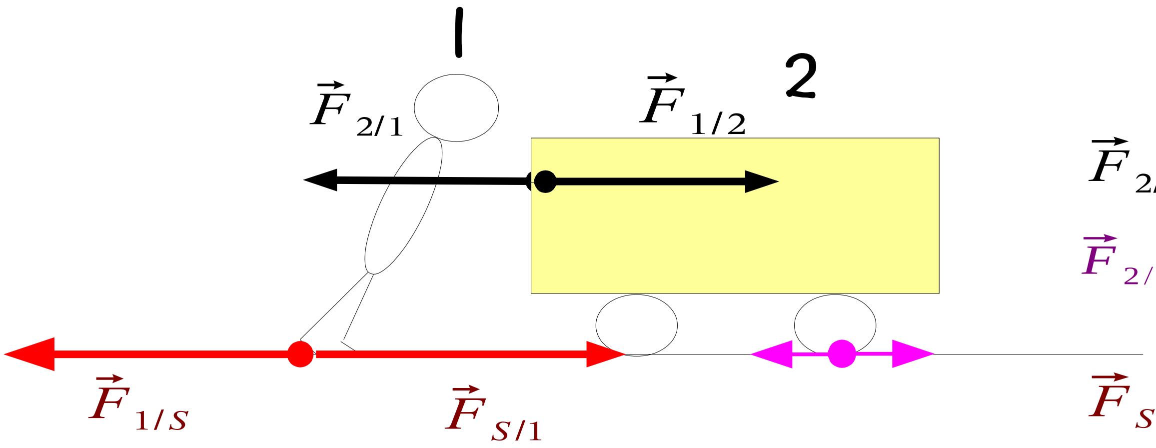
ex : un petit et un gros aimants flottant sur une surface d'eau et en contact. (pôles opposés).
Si $F_{1/2} < F_{2/1}$ alors 2 «pousse» 1 qui avance !

Ce principe suppose que les forces sont exercées spontanément - Ceci est faux en relativité (ex: le soleil ne connaît le déplacement de la terre qu'au bout de 8 mn)

Principe de l'action et de la réaction

Autre exemple : chariot poussé

Le chariot avance, même si deux à deux les actions et réactions s'annulent.



$$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$$

$$\vec{F}_{2/S} = -\vec{F}_{S/2}$$

$$F_{1/2} > F_{S/2}$$

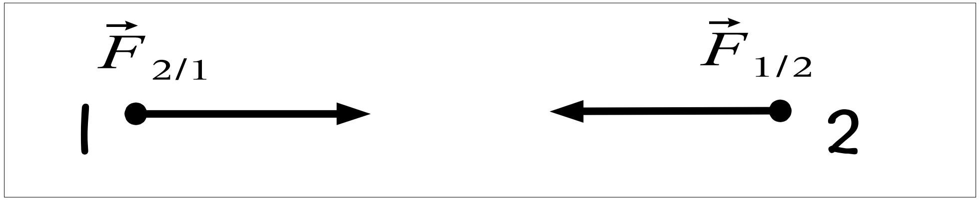
$$\vec{F}_{S/1} = -\vec{F}_{1/S}$$

$$F_{S/1} > F_{2/1}$$

Application : 2 objets isolés

Sur lesquels ne s'applique aucune force externe et dont la somme des masses est constante

Alors, quelle que soit leur interaction mutuelle , on a :



$$\vec{F}_{1/2}+\vec{F}_{2/1} = \vec{0}$$

Or, $d\vec{P}_1 = \vec{F}_{2/1}\,dt$, $d\vec{P}_2 = \vec{F}_{1/2}\,dt$

d'où : $d\vec{P}_1 + d\vec{P}_2 = (\vec{F}_{2/1}+\vec{F}_{1/2})\,dt = 0 = d\vec{P}$,avec $\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2$

soit encore : $\vec{P} = \vec{Cte}$

La quantité de mvt d'un système isolé reste constante au cours du temps. Cette loi de conservation a été introduite pour la première fois par René Descartes (1596-1650), élève d'Isaac Beeckman (1588-1637)

Application : lois de Newton

1ère loi : Principe d'Inertie (PI) , dans un référentiel Galiléen (non accéléré) (ou référentiel inertiel), un système isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme

2ème loi : Dans un référentiel Galiléen, la résultante des forces appliquées à un point matériel i de masse m_i constante est égale au produit de sa masse par son accélération

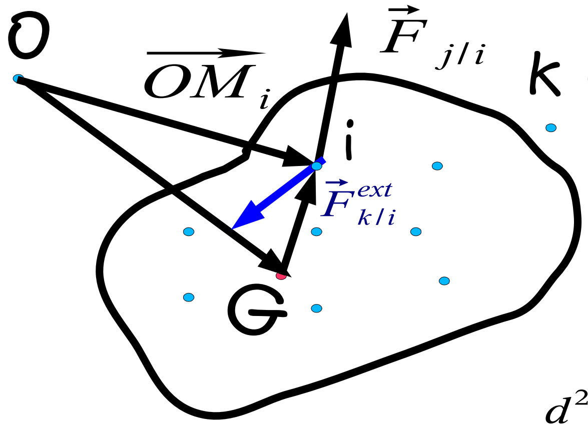
$$\sum_j \vec{F}_{j/i} = m_i \vec{\Gamma}_i$$

3ème loi : Principe d'action et de réaction

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

Ces forces ont le même support (portées par une droite commune)

Centre de masse



Système constitué de n points matériels de masses constantes

$$m_i \vec{\Gamma}_i = m_i \frac{d^2\overrightarrow{OM}_i}{dt^2} = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \vec{F}_{j/i} + \sum_k \vec{F}^{ext}_{k/i}$$

$$\overrightarrow{OM}_i = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i$$

$$m_i \frac{d^2\overrightarrow{OM}_i}{dt^2} = m_i \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} + m_i \frac{d^2\overrightarrow{GM}_i}{dt^2} = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \vec{F}_{j/i} + \sum_k \vec{F}^{ext}_{k/i}$$

$$m_i \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} + \frac{d^2(m_i\overrightarrow{GM}_i)}{dt^2} = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \vec{F}_{j/i} + \sum_k \vec{F}^{ext}_{k/i}$$

pour tous les points i

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} + \frac{d^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GM}_i\right)}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \vec{F}_{j/i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_k \vec{F}^{ext}_{k/i}$$

Centre de masse...

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}+\frac{d^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GM}_i\right)}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\vec{F}_{j/i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k}\vec{F}_{k/i}^{ext}$$

or : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\vec{F}_{j/i}=0$ principe d'action et de réaction

Si de plus, on choisit G tel que : $\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GM}_i=0$ centre de masse, G étant alors le centre de masse.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k}\vec{F}_{k/i}^{ext}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\vec{\Gamma}_G=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k}\vec{F}_{k/i}^{ext}$$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k}\vec{F}_{k/i}^{ext}$ représente la résultante des forces extérieures agissant sur le système

Centre de masse...

$$\boxed{(\sum_{i=1}^{n} m_i)\vec{\Gamma}_G = m\vec{\Gamma}_G = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k}\vec{F}_{k/i}^{ext}}$$

Cette relation permet de transformer l'étude mécanique d'un système complexe en un simple problème de mécanique du point, appliquée à son centre de masse, à condition de ne pas s'intéresser à la déformation de ce système, ni à sa rotation autour de G.

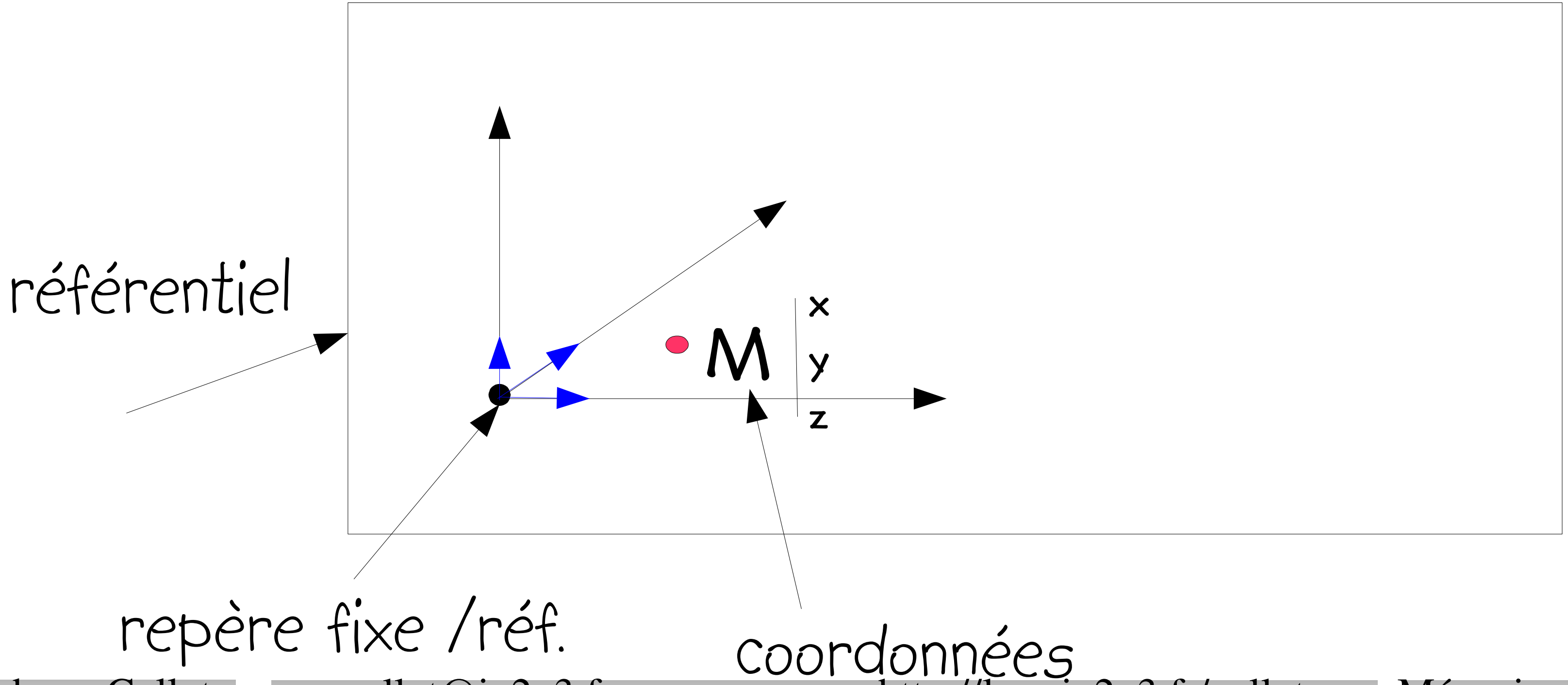
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GM}_i = 0} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OM}_i \Rightarrow \overrightarrow{OG}\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OM}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OM}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

Centre de masse...

Attention le centre de masse (CM) ne se confond pas toujours avec le Centre de Gravité (CG) !

Référentiels , repères et coordonnées



Référentiels inertiels ou Galiléens

== référentiel non accéléré

t « journée , et déplacement petit par rapport au rayon terrestre, référentiel terrestre , lié au sol.

Mvts terrestres plus grands et temps plus longs (nuages, satellites, courants océaniques...), référentiel avec origine au centre de la terre et axes pointant sur des étoiles.

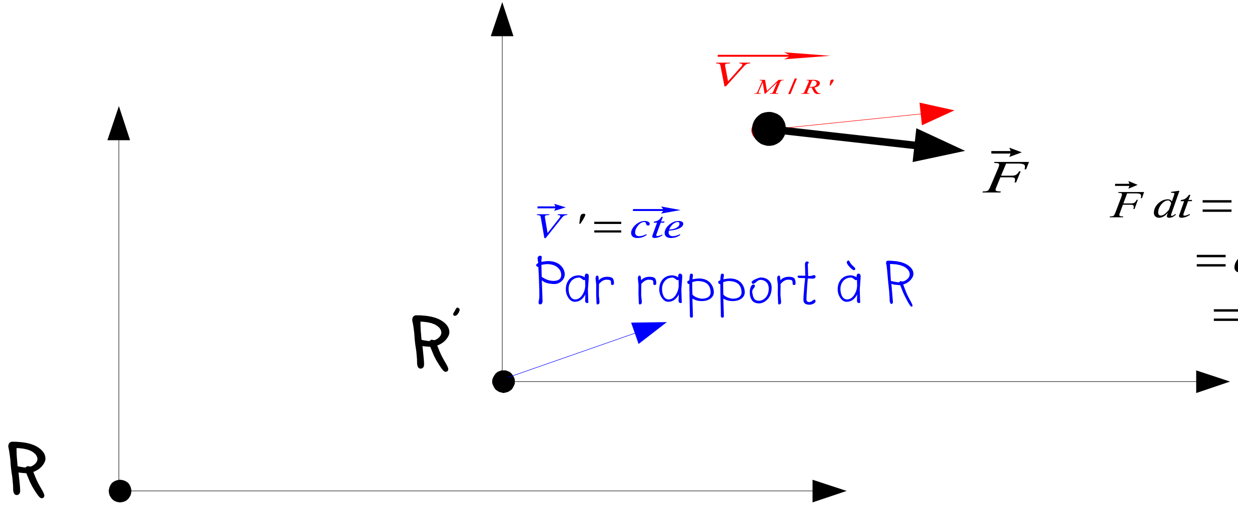
Mvts planétaires, origine au CM du système solaire et axes pointant sur des étoiles.

Référentiels inertiels ou Galiléens

Il n'existe pas de référentiel inertiel parfait ! C'est l'un des constats qui ont conduit à l'élaboration de la théorie de la relativité.

Principe de relativité de Newton (1642-1727) ou de Galilée (1564-1642)

Les lois et les phénomènes mécaniques sont les mêmes dans tout référentiel non accéléré.



$$\vec{F}\,dt = d\,\vec{P}_R = d\left(m\left(\vec{V}_{M/R'} + \vec{V}\,'\right)\right)$$
$$= d\left(m\,\vec{V}_{M/R'}\right) + d\left(m\,\vec{V}\,'\right)$$
$$= d\left(m\,\vec{V}_{M/R'}\right) = d\,\vec{P}_{R'}$$

Pour une même force appliquée, la variation de la quantité de mvt est la même dans R ou R'

Récapitulatif

Vecteur quantité de mouvement d'un point matériel :

$$\boxed{\vec{P} = m\,\vec{V}}$$

masse

vecteur vitesse

PFD pour un point matériel : dans un référentiel inertiel

$$d\vec{P} = \sum \vec{F}\,dt$$ forme différentielle

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}$$ forme dérivée

La quantité de mvt d'un système isolé reste constante au cours du temps

Récapitulatif : lois de Newton

1ère loi : Principe d'Inertie (PI) , dans un référentiel Galiléen (non accéléré) (ou référentiel inertiel), un système isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme

2ème loi : Dans un référentiel Galiléen, la résultante des forces appliquées à un point matériel i de masse m_i constante est égale au produit de sa masse par son accélération

$$\sum_j \vec{F}_{j/i} = m_i \vec{\Gamma}_i$$

3ème loi : Principe d'action et de réaction

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

Ces forces ont le même support (portées par une droite commune)

Récapitulatif : lois de Newton

1ère loi : Principe d'Inertie (PI) , dans un référentiel Galiléen (non-accéléré) (ou référentiel inertiel), un système isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme

2ème loi : Dans un référentiel Galiléen, la résultante des forces appliquées à un point matériel i de masse m_i constante est égale au produit de sa masse par son accélération

$$\sum_j \vec{F}_{j/i} = m_i \vec{\Gamma}_i$$

3ème loi : Principe d'action et de réaction

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

Ces forces ont le même support (portées par une droite commune)

Récapitulatif

PFD pour le Centre de Masse d'un système matériel fermé :

Dans un référentiel inertiel $\boxed{m_{tot}\vec{\Gamma}_G = \sum \vec{F}^{ext}}$

où : m_{tot} est la masse totale du système

Centre de masse d'un système matériel : $\boxed{\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$ $\quad \sum_{i=1}^{n} m_i = m_{tot}$

Principe de relativité newtonienne ou galiléenne :
Les lois et les phénomènes mécaniques sont les mêmes dans tout référentiel non accéléré