# Principe Fondamental de la Dynamique :

## Lien entre les causes et les effets s'agissant du mouvement des solides indéformables

# Principe Fondamental de la Dynamique d'un solide rigide

Les principes fondamentaux de la physique sont les causes premières des lois de la nature. En cela, ils ne sont pas démontrables (sinon ils découleraient de principes plus fondamentaux encore), mais peuvent être réfutés par l'expérience. Ils sont comparables aux axiomes des mathèmatiques.

PFD :

Dans un référentiel inertiel (ou galiléen, ou non-accéléré), le torseur de la somme des efforts extérieurs s'exerçant sur un solide rigide est égal (équivalent) à son torseur dynamique.

# Principe Fondamental de la Dynamique d'un solide rigide

$$\tau_{F^e}\left\{\begin{matrix}\sum \vec{R}^{ext\to S} \\ \sum \vec{M}_O^{\vec{R}^{ext\to S}}\end{matrix}\right\}_{O/\mathfrak{R}} = \tau_D\left\{\begin{matrix} m\vec{\Gamma}^G_{/\mathfrak{R}} \\ \vec{\delta}_{S/O}\end{matrix}\right\}_{O/\mathfrak{R}}$$

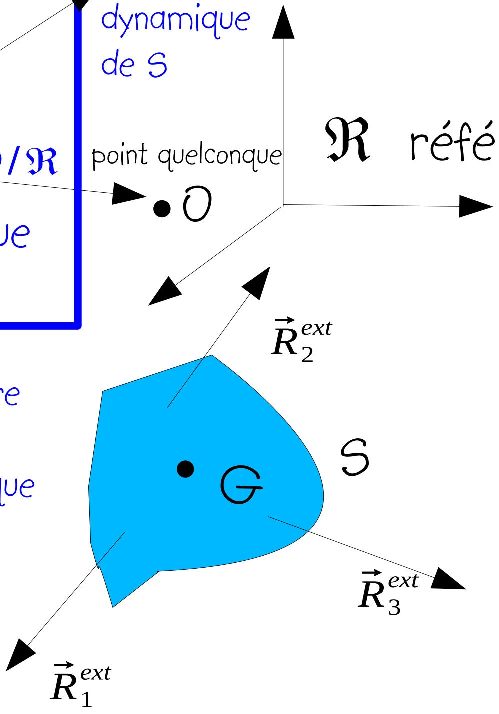
Torseur des efforts extérieurs

Torseur dynamique

Moment dynamique de S

point quelconque

$\mathfrak{R}$ référentiel inertiel (ou galiléen) (ou non-accéléré)




$$\sum \vec{R}^{ext\to S} = m\vec{\Gamma}^G_{/\mathfrak{R}}$$

Théorème du centre d'inertie ou de la résultante dynamique

G centre d'inertie

$$m\overrightarrow{OG} = \int_S \rho(M)\overrightarrow{OM}\,dV$$

$$\sum \vec{M}_O^{\vec{R}^{ext\to S}} = \vec{\delta}_{S/O}$$

Théorème du moment dynamique

Six équations pour 6 degrés de liberté => Problème soluble !

# Rappel : relation entre les moments dynamique et cinétique

$$\vec{\delta}_{S/O} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_{S/O}) + m\,\vec{V}^{O}_{/\mathfrak{R}} \wedge \vec{V}^{G}_{/\mathfrak{R}}$$

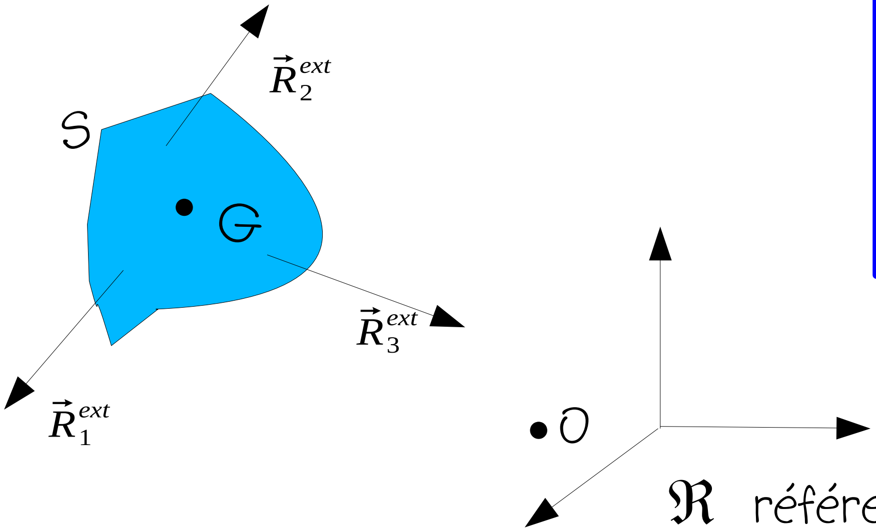
Si O est quelconque

Si O=G ou O est fixe / $\mathfrak{R}$ ou $\vec{V}^{O}_{/\mathfrak{R}} = \alpha\,\vec{V}^{G}_{/\mathfrak{R}}$

$$\vec{\delta}_{S/O} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_{S/O})$$

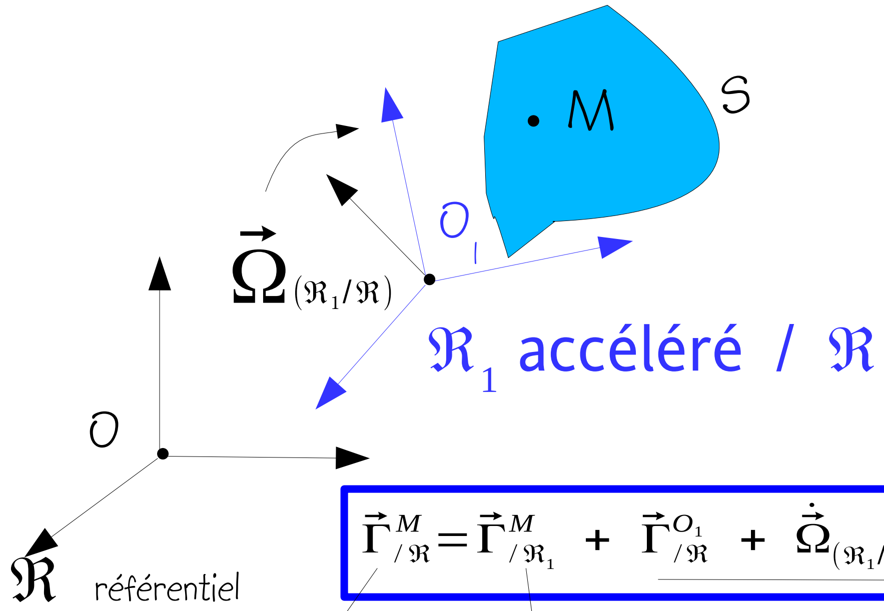
Théorème du moment cinétique

$$\sum \vec{M}_{O}^{\vec{R}^{ext \to S}} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_{S/O})$$




$\mathfrak{R}$ référentiel inertiel

# PFD dans un référentiel non-inertiel (accéléré)




$$\tau_{D/\mathfrak{R}} = \tau_{D/\mathfrak{R}_1} + \tau_{D-\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}} + \tau_{D-Coriolis}$$

Torseur des efforts d'inertie (avec le signe -)

$$\boxed{\tau_{D/\mathfrak{R}_1} = \tau_{F^e} - \tau_{D-\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}} - \tau_{D-Coriolis}}$$

Torseur de Coriolis (avec le signe -)

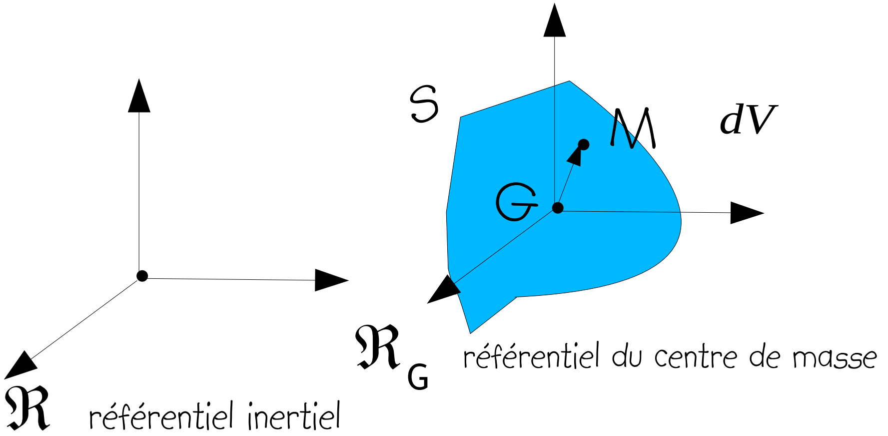
$$\boxed{\vec{\Gamma}^M_{/\mathfrak{R}} = \vec{\Gamma}^M_{/\mathfrak{R}_1} + \underline{\vec{\Gamma}^{O_1}_{/\mathfrak{R}} + \dot{\vec{\Omega}}_{(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R})} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega}_{(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R})} \wedge \left(\vec{\Omega}_{(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R})} \wedge \overrightarrow{O_1 M}\right)} + 2\vec{\Omega}_{(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R})} \wedge \vec{V}^M_{/\mathfrak{R}_1}}$$

Accélération d'entraînement

Accélération de Coriolis

$\tau_{D/\mathfrak{R}}$ $\tau_{D/\mathfrak{R}_1}$ $\tau_{D-\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}}$ $\tau_{D-Coriolis}$

# PFD dans le référentiel du centre de masse (accéléré)




$$\vec{\Omega}_{(\Re_G/\Re)}=\vec{O}$$

$$\boxed{\tau_{D/\Re_G}=\tau_{F^e}-\tau_{D-\Re_G/\Re}}$$

$$\boxed{\sum\vec{R}^{ext\to S}=m\vec{\Gamma}^{G}_{/\Re} \qquad \sum\vec{M}_G^{\vec{R}^{ext\to S}}=\vec{\delta}_{S/G}}$$

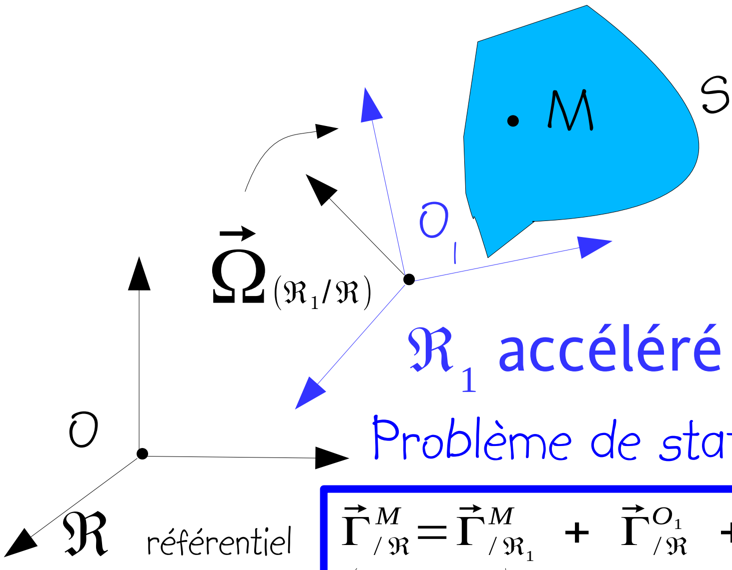
Similaire au PFD dans réf. inertiel mais pour le point G uniquement

$$\boxed{\vec{\Gamma}^{M}_{/\Re}=\vec{\Gamma}^{M}_{/\Re_G}\;+\;\underline{\vec{\Gamma}^{G}_{/\Re}\;+\;\dot{\vec{\Omega}}_{(\Re_G/\Re)}\wedge\overrightarrow{GM}+\vec{\Omega}_{(\Re_G/\Re)}\wedge(\vec{\Omega}_{(\Re_G/\Re)}\wedge\overrightarrow{GM})}\;+\;2\vec{\Omega}_{(\Re_G/\Re)}\wedge\vec{V}^{M}_{/\Re_G}}$$

$$\tau_{D/\Re_G} \qquad \vec{\Gamma}^{G}_{/\Re} \qquad 0$$

$$\tau_{D/\Re} \qquad \tau_{D/\Re_G}\begin{Bmatrix}0\\ \vec{\delta}_{S/G}\end{Bmatrix}_{G/\Re_G} \qquad \tau_{D-\Re_G/\Re}\begin{Bmatrix}m\vec{\Gamma}^{G}_{/\Re}\\ \int_S\overrightarrow{GM}\wedge\vec{\Gamma}^{G}_{/\Re}\,dm(M)=0\end{Bmatrix}_{G/\Re}$$

# PFD dans un référentiel non-inertiel (accéléré)




référentiel inertiel

$\Re_1$ **accéléré / $\Re$**

Si S est immobile par rapport à $\Re_1$

$$\boxed{0 = \tau_{F^e} - \tau_{D-\Re_1/\Re}}$$

Torseur des efforts d'inertie (avec le signe -)

Problème de statique mais avec des efforts d'inertie supplémentaires

$$\boxed{\vec{\Gamma}^{M}_{/\Re} = \vec{\Gamma}^{M}_{/\Re_1} + \vec{\Gamma}^{O_1}_{/\Re} + \dot{\vec{\Omega}}_{(\Re_1/\Re)} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega}_{(\Re_1/\Re)} \wedge \left(\vec{\Omega}_{(\Re_1/\Re)} \wedge \overrightarrow{O_1 M}\right) + 2\vec{\Omega}_{(\Re_1/\Re)} \wedge \vec{V}^{M}_{/\Re_1}}$$

$\tau_{D/\Re}$

0

Accélération d'entraînement

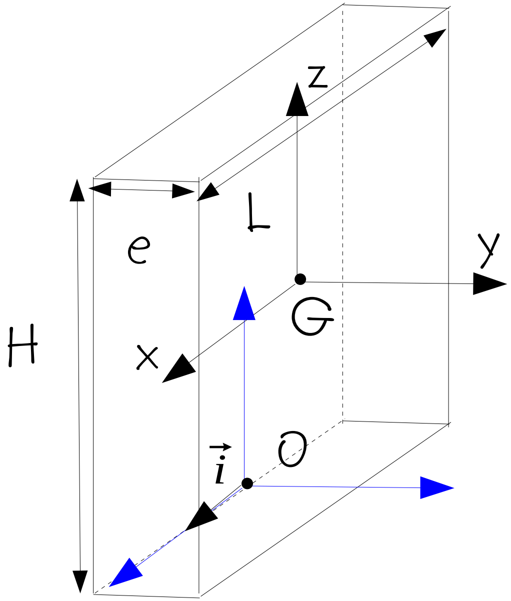
$\tau_{D-\Re_1/\Re}$

Accélération de Coriolis

0

0

# Exemple : retour sur la plaque qui bascule (voir cours sur la cinétique)

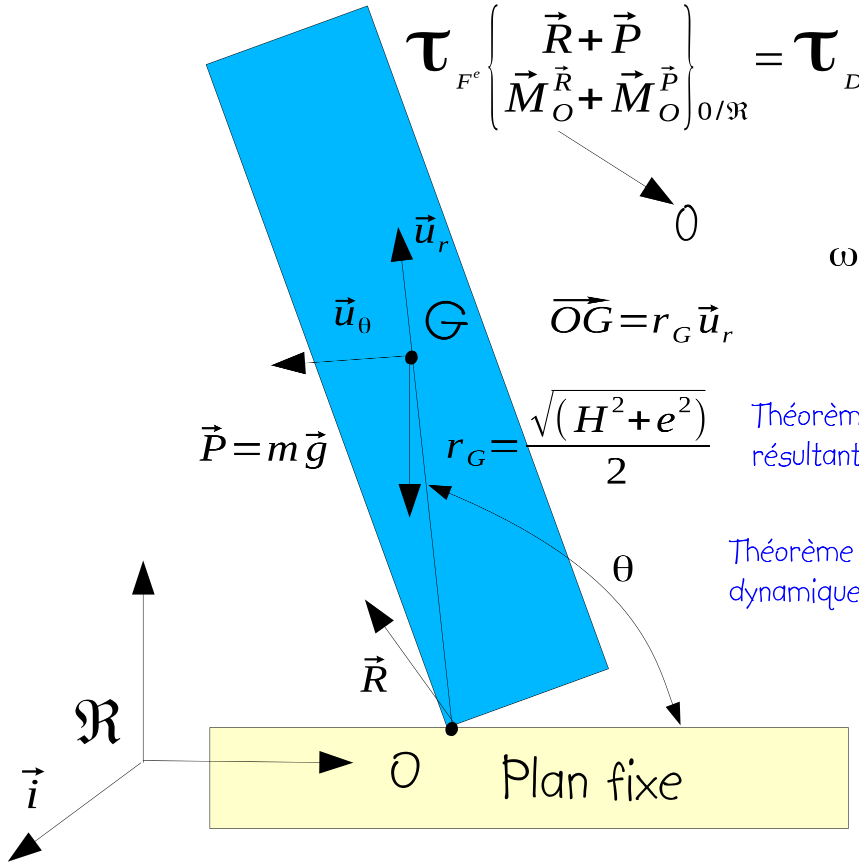



Quand la plaque bascule, O est fixe et le vecteur vitesse de rotation est selon (0,x) $\vec{\omega}=\omega\vec{i}$

$$\vec{L}_0=I_0\,\omega\,\vec{i}=\begin{pmatrix} A+m(\frac{e^2}{4}+\frac{H^2}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & B+m(\frac{H^2}{4}) & \frac{-meH}{4} \\ 0 & \frac{-meH}{4} & C+m(\frac{e^2}{4}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\\0\\0\end{pmatrix}$$

Le moment cinétique de la plaque qui bascule est donc : $\vec{L}_0=(A+m(\frac{e^2}{4}+\frac{H^2}{4}))\,\omega\,\vec{i}=\frac{m}{3}(e^2+H^2)\,\omega\,\vec{i}$

Exemple : On pousse un peu trop, la plaque bascule et chute ! (voir cours d'introduction)




$$\tau_{F^e}\left\{\begin{matrix}\vec{R}+\vec{P}\\ \vec{M}_O^{\vec{R}}+\vec{M}_O^{\vec{P}}\end{matrix}\right\}_{0/\Re}=\tau_D\left\{\begin{matrix}\dfrac{d\vec{P}}{dt}=m\vec{\Gamma}^G_{/\Re}\\ \vec{\delta}_O=\dfrac{d\vec{L}_O}{dt}\end{matrix}\right\}_{O/\Re}$$

$\vec{M}_O^{\vec{R}} \rightarrow 0$

$$\vec{L}_0=\frac{m}{3}(e^2+H^2)\omega\,\vec{i}=\frac{4m}{3}r_G^2\omega\,\vec{i}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\frac{4m}{3}r_G^2\dot{\omega}\,\vec{i}$$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\qquad \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi-artg\left(\frac{e}{H}\right)\qquad \text{À t=0}\quad \theta=\frac{\pi}{2}\ ,\ \omega=0$$

$$\vec{OG}=r_G\vec{u}_r\qquad r_G=\frac{\sqrt{(H^2+e^2)}}{2}$$

Théorème de la résultante dynamique

$$\boxed{R_x=0}$$

$$-m r_G\omega^2=-m g\sin\theta+R_r\quad\Rightarrow\quad\boxed{R_r=m(g\sin\theta-r_G\omega^2)}$$

$$m r_G\dot{\omega}=-m g\cos\theta+R_\theta$$

Théorème du moment dynamique

$$-m g r_G\cos\theta=\frac{4m}{3}r_G^2\dot{\omega}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\dot{\omega}=\ddot{\theta}=-\frac{3}{4}\frac{g}{r_G}\cos\theta}$$

$$m r_G\dot{\omega}=-m g\cos\theta+R_\theta\quad\Rightarrow\quad\boxed{R_\theta=\frac{mg}{4}\cos\theta}$$

Le mouvement peut être programmé sur ordinateur, on initialise à t = 0 par $\Theta=\pi/2+\varepsilon$

## Programme python de calcul du mouvement de chute

```python
# Chute de la plaque - Johann Collot
# 14/03/2021
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math as m

# Data for plotting

H=1. #  m
e=0.5 #  m
g=9.81

w=0. # vitesse angulaire
wp=0. # accélération angulaire
theta=m.pi/2. + 0.00001 # valeur initiale de l'angle
rg=m.sqrt(H*H+e*e)/2. # rayon du centre de masse
thetamax = m.pi - m.atan(e/H) # angle max.
deltat = 0.01 # increment temporel
t=0. # temps initial

at=[0.] # tableau des temps
atheta=[theta*180./m.pi] # tableau des angles
i=0

while theta < thetamax :
        wp= -0.75 *g/rg*m.cos(theta)
        w=w+wp*deltat
        theta=theta+w*deltat
        t=t+deltat
        at.append(t)
        atheta.append(theta*180./m.pi)
        i=i+1
print ("nombre de points :", i)
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(at,atheta,'r.',ms=2.)

ax.set(xlabel=u"temps (s)", ylabel=u"angle (en degrés)",
       title=u"Chute de la plaque")
ax.grid()
fig.savefig("Chute-Plaque.jpg")
```

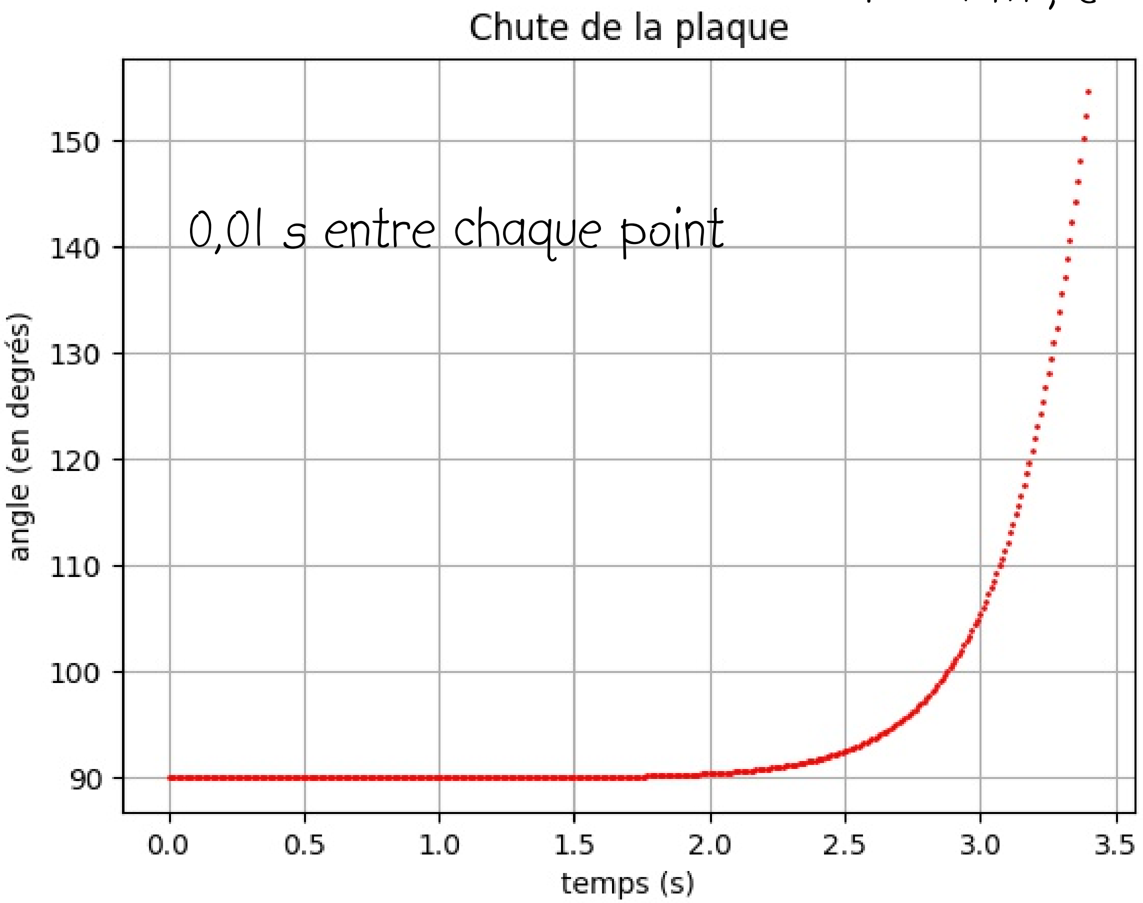
# Exemple : Brutale sera la chute !

H = 1 m , e = 50 cm

Message aux scientifiques en herbe :

Il serait bon que vous appreniez à produire cela sur un ordinateur.

Ce modèle peut être utilisé pour estimer le temps de chute de nombreux corps : arbres, poteaux, tours ...



# Exercice : Chute d'une plaque

Montrer que les réactions normale et tangentielle du sol sont telles que :

$$R_N = m\,g$$

$$R_T = m\left(\frac{3g}{4}\sin\theta\cos\theta - r_G\,\omega^2\cos\theta\right)$$

Montrer alors que la condition de non-glissement de la plaque sur le sol conduit à :

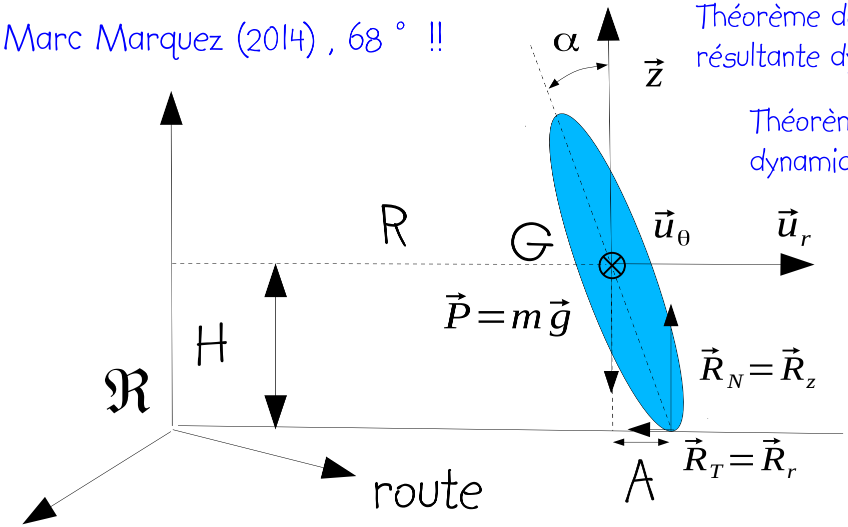
$$\left|\frac{R_T}{R_N}\right| = \frac{3}{8}\sin 2\theta - \frac{r_G\,\omega^2\cos\theta}{g} \leqslant \alpha_s$$

où $\alpha_S$ est le coefficient de frottement statique

Modifier le programme python précédent pour déterminer la valeur maximale de $\alpha_S$ (résultat : 0,45). Si le coefficient de frottement est inférieur à cette valeur la plaque glisse à un moment donné au lieu de basculer simplement ...

# Exemple 2 : moto dans un virage de rayon R à vitesse V constante


Marc Marquez (2014) , 68 ° !!




PFD appliqué dans le référentiel du centre d'inertie

$$\boxed{\sum \vec{R}^{ext\rightarrow S}=m\vec{\Gamma}^{G}_{/\mathfrak{R}} \qquad \sum \vec{M}_G^{\vec{R}^{ext\rightarrow S}}=\vec{\delta}_{S/G}}$$

$$\vec{\Gamma}^{G}_{/\mathfrak{R}}=-\dot{\theta}^2 R\,\vec{u}_r=\frac{-V^2}{R}\vec{u}_r \qquad \dot{\theta}=\frac{V}{R}=constante$$

Théorème de la résultante dynamique

$$R_z=m\,g \qquad R_\theta=0 \qquad R_r=-m\frac{V^2}{R}$$

Théorème du moment dynamique

$$\vec{\delta}_{S/G}=\frac{d}{dt}(\vec{L}_{S/G})=\frac{d}{dt}(J\,\dot{\theta}\,\vec{z})=0$$

J moment d'inertie / (o;z)

$$\sum \vec{M}_G^{\vec{R}^{ext\rightarrow S}}=0 \;\Rightarrow\; \vec{M}_{\vec{R}/G}=0 \text{ car } \vec{M}_{\vec{P}/G}=0$$

La réaction du sol passe par G !

$$m\frac{V^2}{R}H-mg\,A=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{A}{H}=tg\,\alpha=\frac{V^2}{R\,g}}$$

$$\boxed{\alpha_s\geqslant\left|\frac{R_T}{R_N}\right|=\frac{V^2}{R\,g}}$$

coefficient de frottement statique

Marc Marquez (2014) , 68 ° !! αs > 2,45 !

Pour en savoir plus :


-Mécanique générale : Christian Gruber, Presses polytechniques romandes

-Mécanique, J.Ph. Pérez, Masson

-Mécanique , J.-L. Teyssier, J.-P. Ducourtieux, J.-P. Moliton, Armand Collin

-Modules Python

- https://matplotlib.org
- https://numpy.org