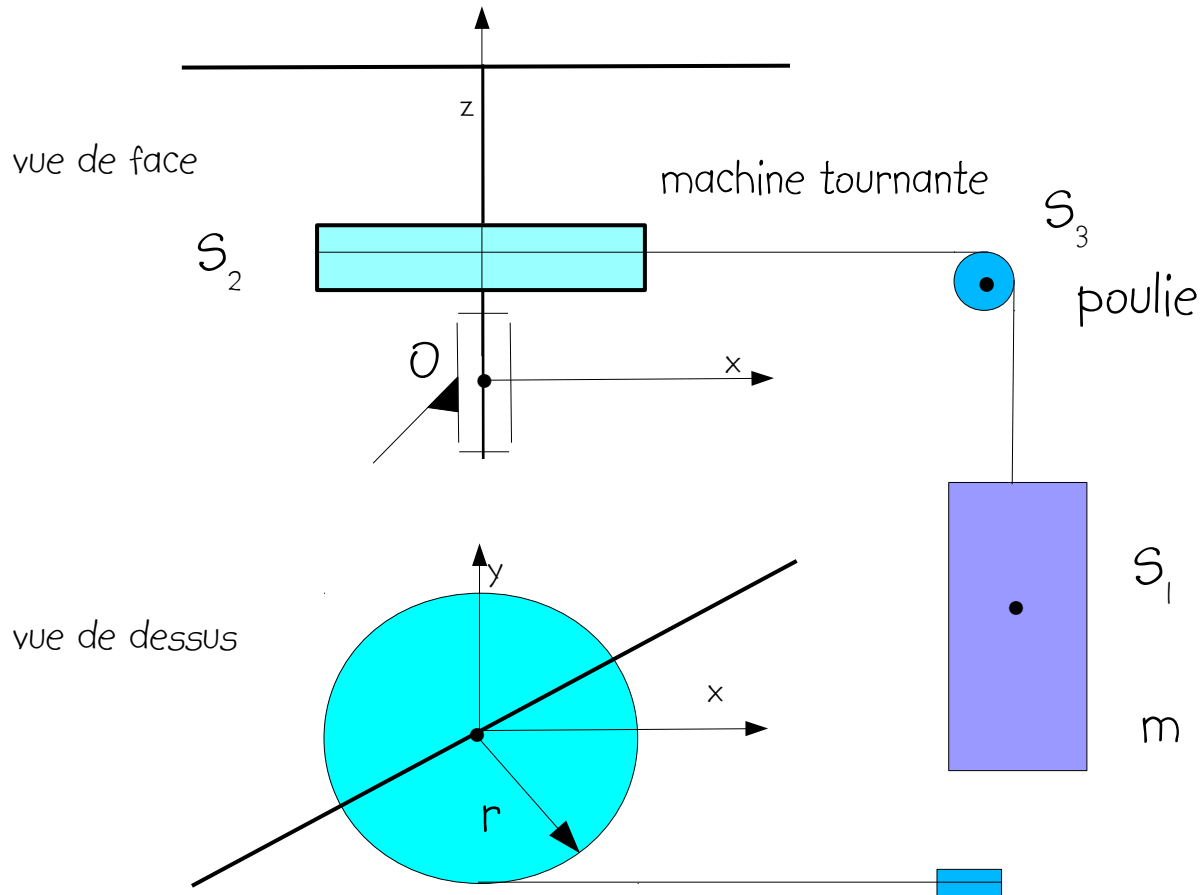


Mécanique du solide rigide :

Méthode de résolution d'un problème
appliquée à la machine tournante

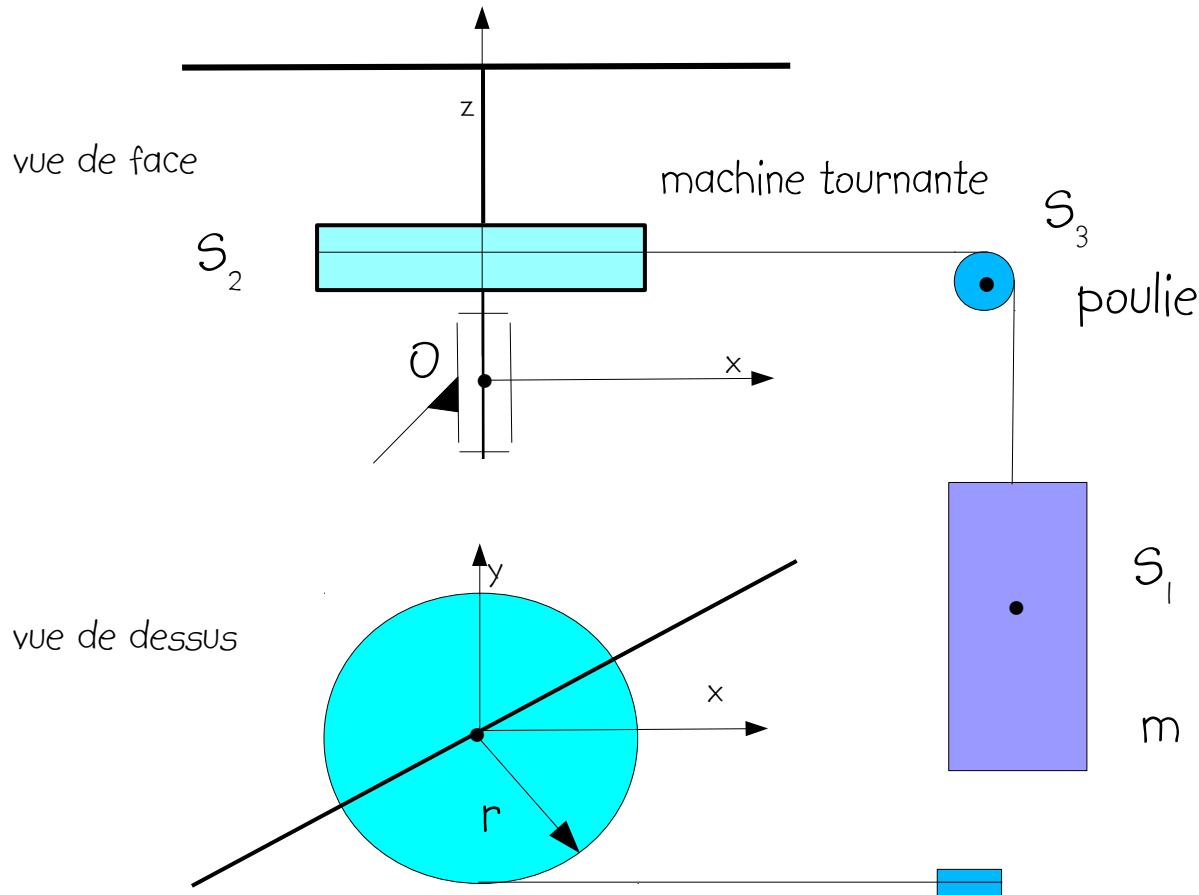
Faire un schéma simplifié mais représentatif du problème



Dénombrer les solides à traiter dans le problème

- S_1 masse m
- S_2 machine tournante
- S_3 poulie

Caractériser le mouvement des solides



Mouvement plan, rectiligne, circulaire, de rotation, uniforme, accéléré, décéléré, uniformément accéléré, oscillant ?

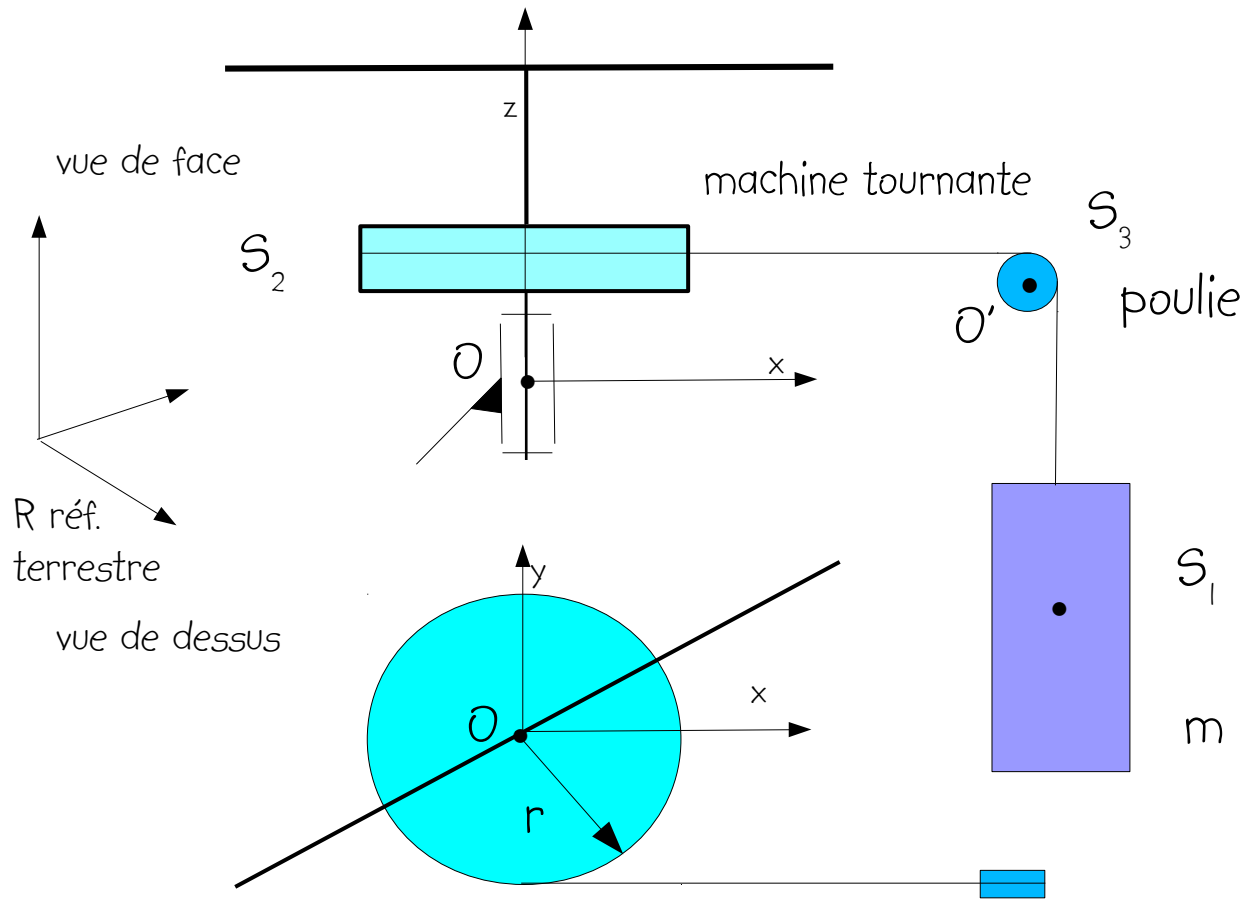
Parabolique, hélicoïdal, elliptique. Glissement ou non glissement ?

S₁ : mvt rectiligne vertical vers le bas uniformément accéléré.

S₂ : rotation uniformément accélérée autour de $(0,z)$. Soumis à une liaison pivot.

S₃ : rotation autour d'un axe parallèle à $(0,y)$.

Référentiel et points fixes du mouvement

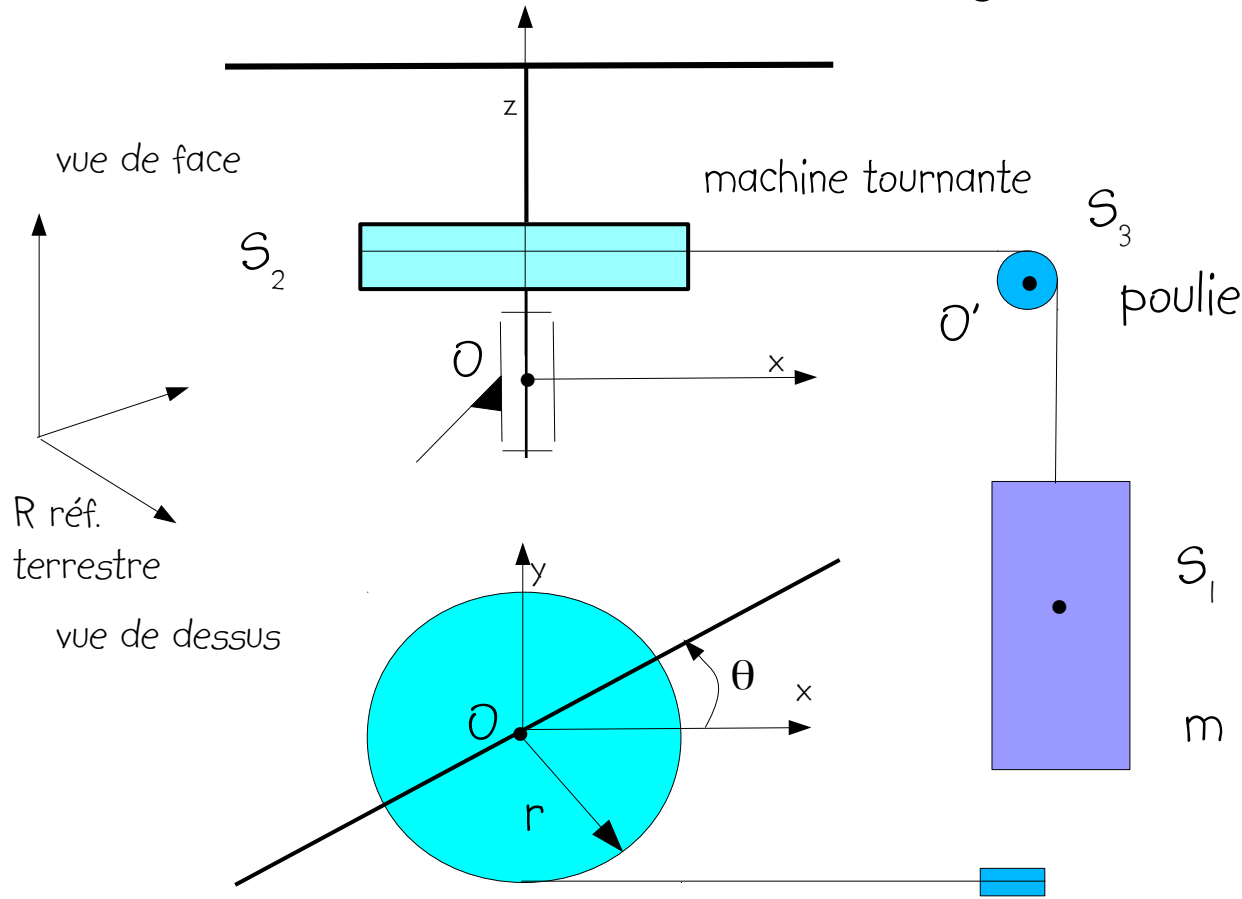


Se munir d'un référentiel R préférentiellement inertiel.
Identifier les points fixes des solides par rapport à R .

O de S_2 est un point fixe, mais tous les points de l'axe (O, z) le sont également dont G .

O' de S_3 est également un point fixe.

Inventaire des liaisons et des degrés de liberté de chaque solide



S_2 est soumis à une liaison pivot d'axe (O, z) . Un degré de liberté θ , angle entre (O, x) et la barre de S_2 .

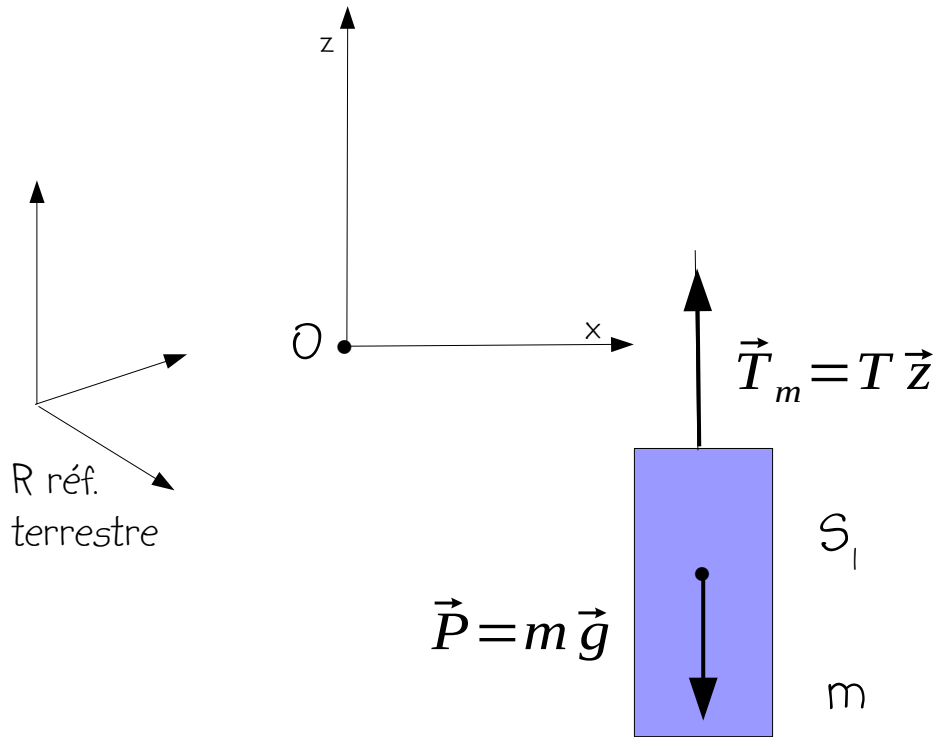
S_1 a priori possède 5 degrés de liberté, que l'on réduit à 1 seul (selon l'axe vertical) par les conditions initiales. Bien lâcher S_1 au repos, corde tendue et verticale. Sinon le modèle n'est plus valable.

S_3 est soumis à une liaison pivot d'axe (O', y) . Un degré de liberté angulaire.

Si le problème semble complexe, tenter de le résoudre par approximations successives (exemple TD sur la masselotte excentrée). Ou/et en négligeant les frottements dans un premier temps (que l'on aura toujours intérêt à réduire dans la partie expérimentale : roulement à billes, palier graissé ...)

Revenir sur ces approximations dans un deuxième temps, éventuellement après avoir vérifié le mouvement expérimentalement.

Étudier chaque solide séparément



On isole S_1 en premier lieu, le plus simple, et qui semble à la source du mouvement (force motrice).

La tension T sur la corde est le module de la force qui agit aux points de contact. Elle se transmet en module si la poulie est sans frottement.

Faire le choix d'un repère de projection adapté. Attention c'est rarement la même chose que le référentiel du mouvement. Ici on prend (o,x,y,z) orthonormé direct.

Exprimer les torseurs cinématique, puis cinétique et dynamique au même point

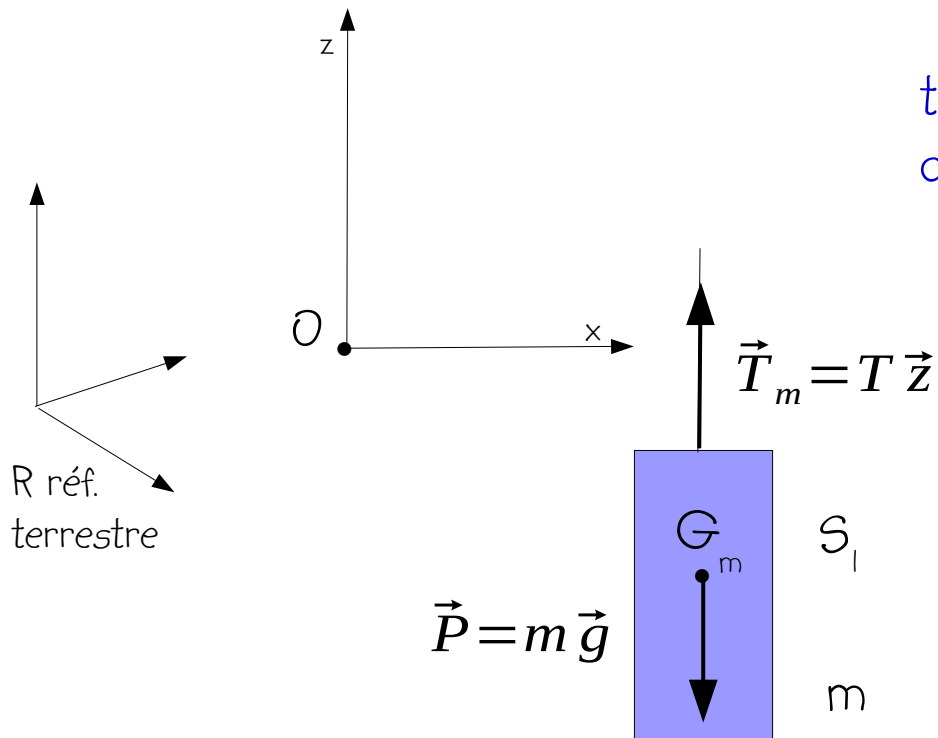
$\vec{T}_m = T \vec{z}$
 $\vec{P} = m \vec{g}$

torseur cinématique
 $\mathcal{T}_V^{S_1} \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{V}_{/R}^{G_m} = \dot{z} \vec{z} \end{array} \right\}_{G_m/R}$

torseur cinétique
 $\mathcal{T}_C^{S_1} \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}_{/R}^{G_m} = m \dot{z} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_m/R}$

torseur dynamique
 $\mathcal{T}_D^{S_1} \left\{ \begin{array}{l} m \vec{\Gamma}_{/R}^{G_m} = m \ddot{z} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_m/R}$

Faire l'inventaire des forces et des efforts et exprimer leurs torseurs.



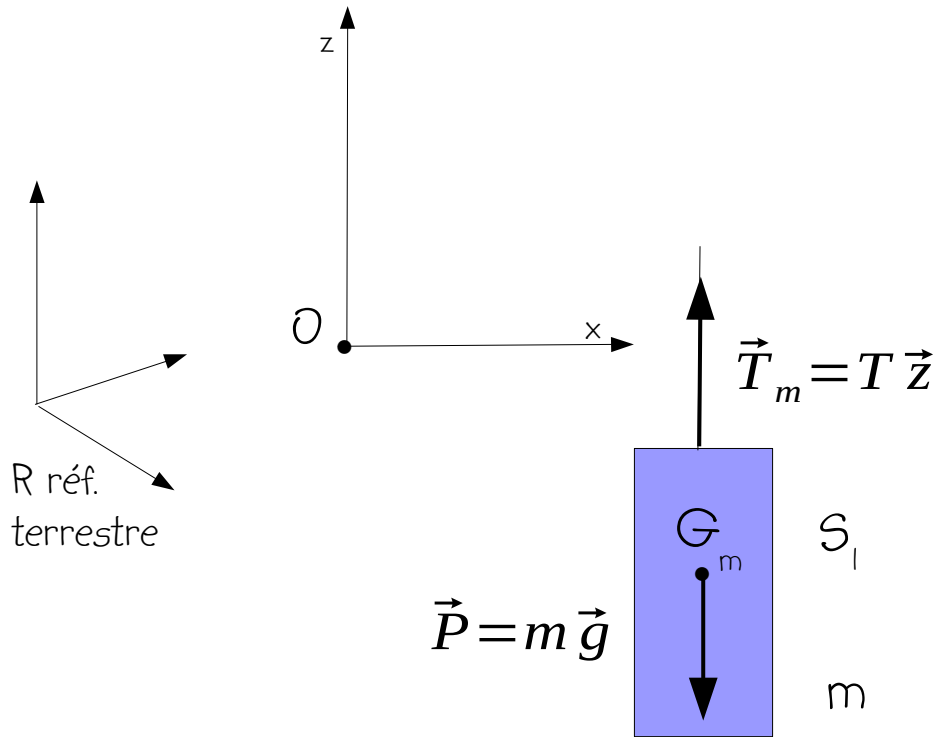
torseur
de pesanteur

$$\tau_P^{S_1} \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_m/R}$$

torseur
de la tension

$$\tau_T^{S_1} \left\{ \begin{array}{l} \vec{T}_m = T \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_m/R}$$

Exprimer le PFD en énoncé torsoriel



$$\tau_{P}^{S_1} + \tau_{T}^{S_1} = \tau_{D}^{S_1}$$

Projeter sur le repère choisi. On obtient alors au plus 6 équations.

$$T - m g = m \ddot{z}$$

$$T = m (\ddot{z} + g)$$

équation du mouvement exploitable

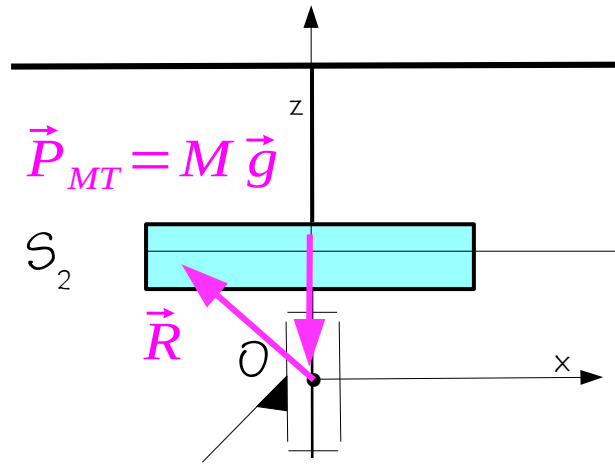


Lors de la projection les torseurs sont réduits au même point !!!
Si ce n'est pas le cas, il faut appliquer la loi de déplacement

Vérification : si $T=0$, chute libre : $\ddot{z} = -g$

Toujours vérifier les résultats dans des conditions limites connues

On reprend avec S_2



vue de face

$$\vec{P}_{MT} = M \vec{g}$$

S_2

\vec{R}

O

x

z

torseur cinématique

$$\tau_V^{S_2} \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} = \omega \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O/R} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

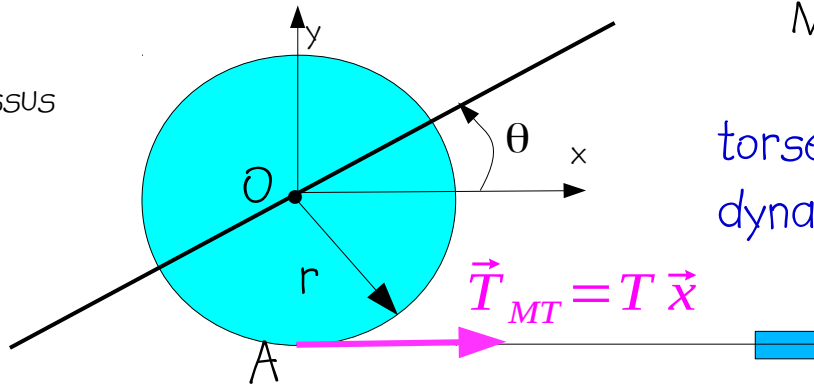
torseur cinétique

$$\tau_C^{S_2} \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}_{/R}^{G_{MT}} = \vec{0} \\ \vec{L}_{MT/O} = [I_O] \vec{\Omega} = I \omega \vec{z} \end{array} \right\}_{O/R}$$

Moment d'inertie de $S_2 / (O, z)$

R réf. terrestre

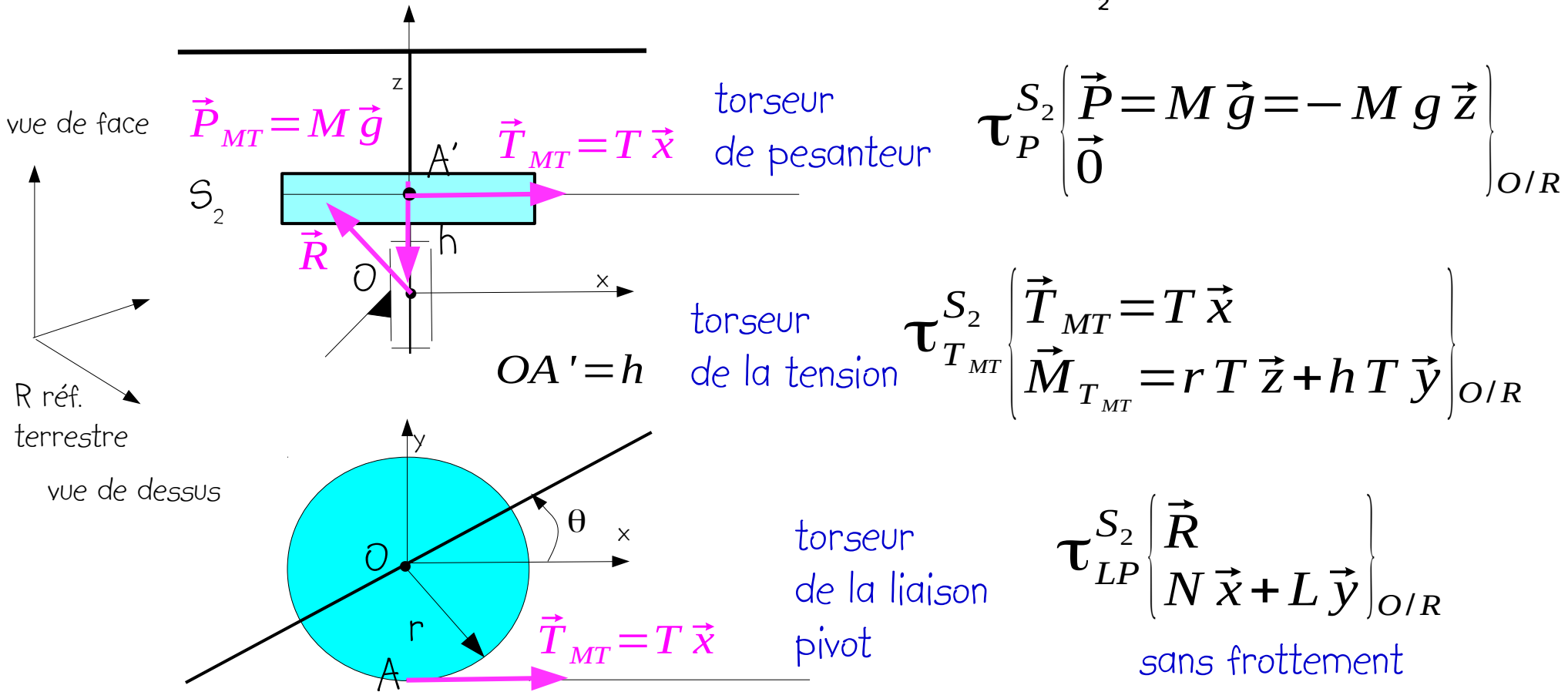
vue de dessus



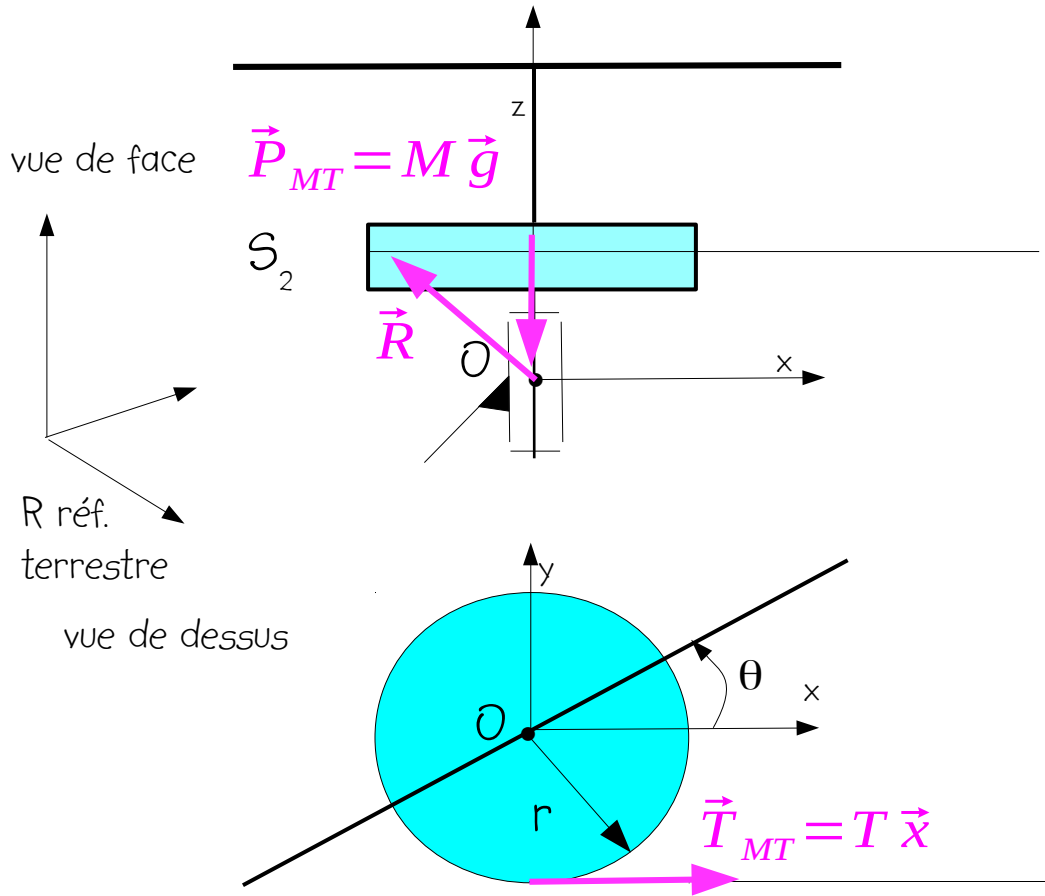
torseur dynamique

$$\tau_D^{S_2} \left\{ \begin{array}{l} m \vec{\Gamma}_{/R}^{G_{MT}} = \vec{0} \\ \vec{\delta}_{MT/O} = \frac{d}{dt} (\vec{L}_{MT/O}) = I \dot{\omega} \vec{z} \end{array} \right\}_{O/R}$$

Torseurs des efforts sur S_2



PFD appliqué à S_2



$$\boldsymbol{\tau}_P^{S_2} + \boldsymbol{\tau}_{T_{MT}}^{S_2} + \boldsymbol{\tau}_{LP}^{S_2} = \boldsymbol{\tau}_D^{S_2}$$

Projections.

théorème de la résultante dynamique

$$R_x + T = 0 \Rightarrow R_x = -T$$

$$R_y = 0$$

$$R_z - Mg = 0 \Rightarrow R_z = Mg$$

théorème du moment dynamique

$$N = 0$$

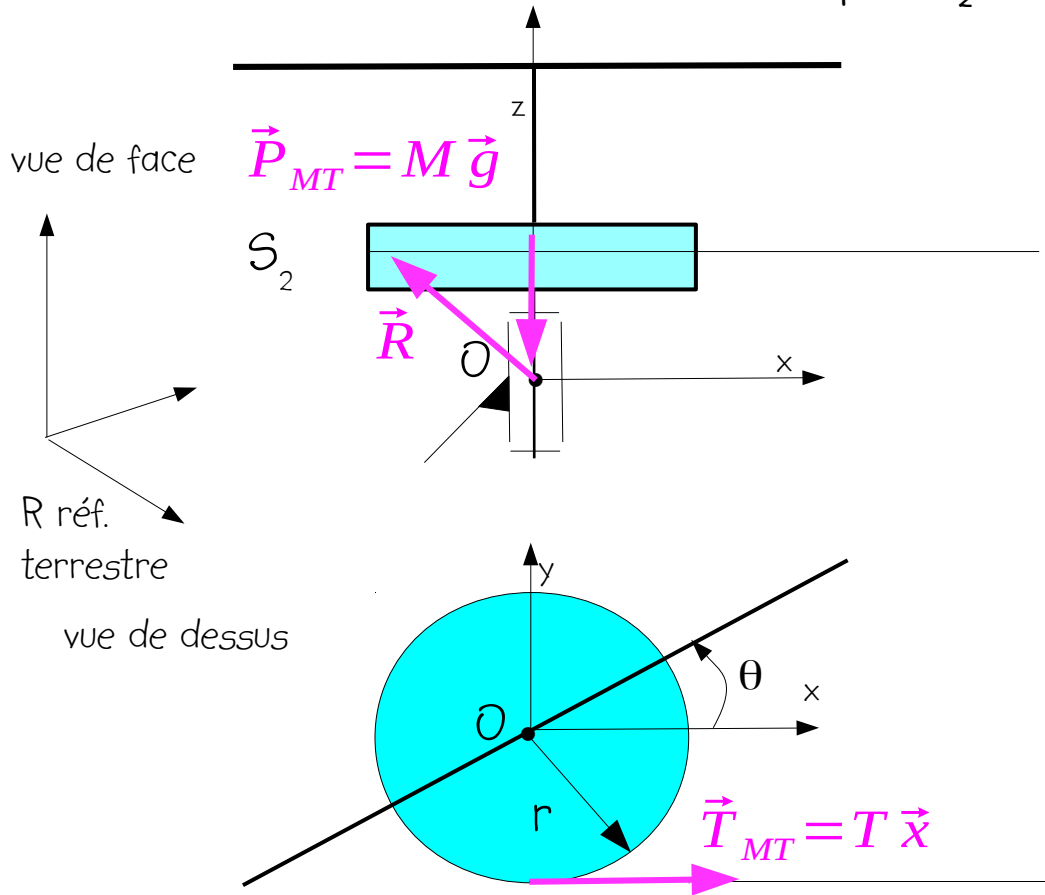
$$L = hT$$

lien avec S_1

$$rT = I\dot{\omega} = mr(g + \ddot{z})$$

$$T = m(\ddot{z} + g)$$

S_1 et S_2 mis ensemble



$$r T = I \dot{\omega} = m r (g + \ddot{z}) \quad \text{lien avec } S_1$$

θ et z sont liés par la corde supposée inextensible. Il n'y a finalement qu'un degré de liberté pour l'ensemble.

$$dz = -r d\theta \Rightarrow \ddot{z} = -r \ddot{\omega}$$

$$m r (g + \ddot{z}) = -I \frac{\ddot{z}}{r}$$

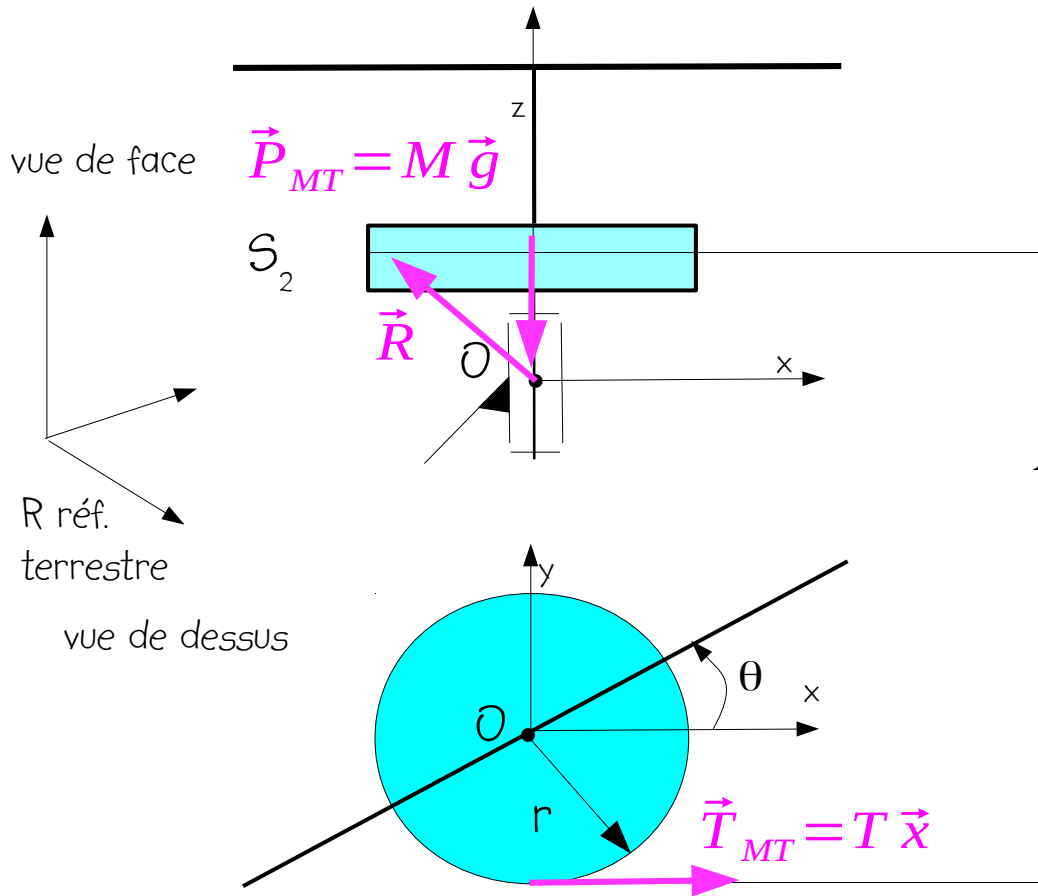
$$\ddot{z} = \frac{-g}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

Vérif :
dimension OK

$$m=0 \Rightarrow \ddot{z}=0 \quad \text{OK}$$

$$I=0 \Rightarrow \ddot{z}=-g \quad \text{OK}$$

Équation horaire de z



On pose :

$$K = \frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

$$K \leq g$$

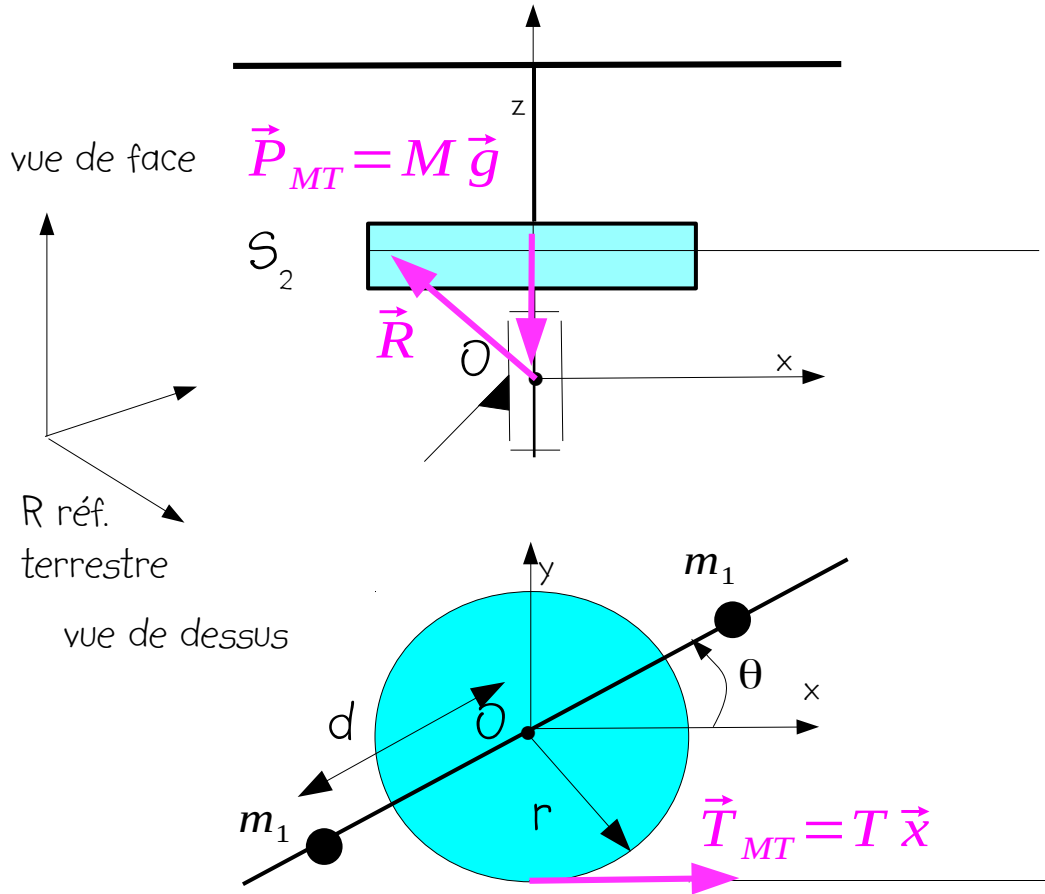
$$\ddot{z} = -K = cte$$

Conditions initiales de la manip :

$$\text{À } t = 0, \dot{z}(0) = 0, z(0) = z_0$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} K t^2 + z_0$$

L'expérience



$$z(t) = -\frac{1}{2} K t^2 + z_0$$

On mesure : $\Delta z = z - z_0$ et t

$$K = \left| \frac{2 \Delta Z}{t^2} \right|$$

$$I = \left(\frac{g}{K} - 1 \right) m r^2$$

On ajoute deux masses à égale distance de l'axe (O, z)

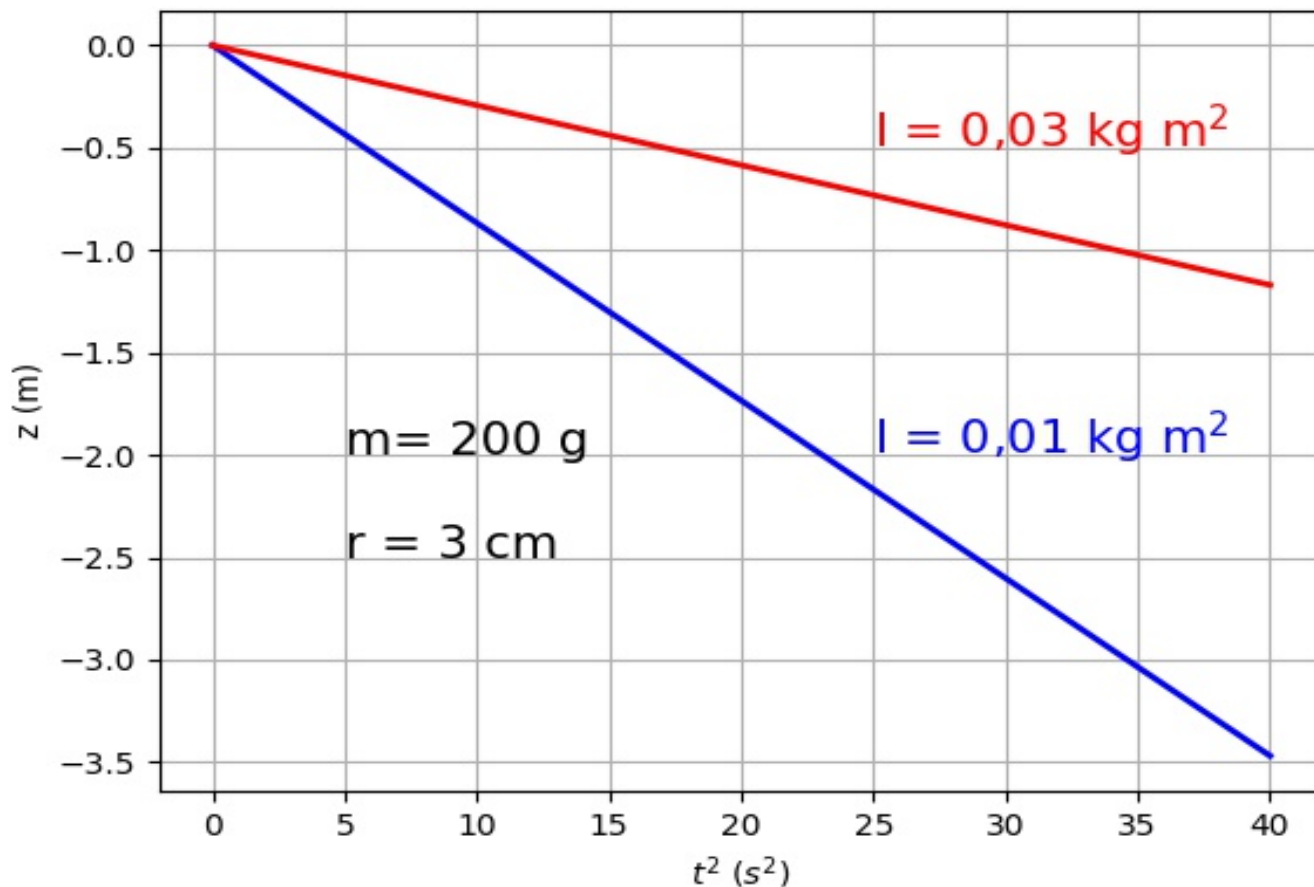
$$I = I_0 + 2 m_1 d^2$$


```

1 # trace Z en fonction de t^2 pour la machine tournante - Johann Collot
2 # 02/05/2021
3 import matplotlib
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import numpy as np
6
7 # Data for plotting
8 g = 9.81
9 I = 1.e-02 # moment d'inertie
10 m = 0.2 # masse
11 r = 0.03 # rayon
12 K = g / ( 1. + I / m /r/r) # acceleration
13
14 t2 = np.arange(0.0, 40., 0.001) # array of time squares
15 z1 = -0.5*K*t2 # array of z positions
16
17 I = 3.e-02 # moment d'inertie
18 K = g / ( 1. + I / m /r/r) # acceleration
19 z2 = -0.5*K*t2 # array of z positions
20
21 fig, ax = plt.subplots()
22 ax.plot(t2,z1,'b-',t2,z2,'r-',linewidth=2.)
23
24 ax.set(xlabel=r"$t^2$ ($s^2$)", ylabel=u"z (m)",
25        title=r"z en fonction de $t^2$")
26 ax.text(25,-0.5, r"I = 0,03 kg m$^2$",
27         color='red', fontsize=15)
28 ax.text(25,-2., r"I = 0,01 kg m$^2$",
29         color='blue', fontsize=15)
30 ax.grid()
31 fig.savefig("MT_Z1.jpg")
32 # plt.show()

```

z en fonction de t^2



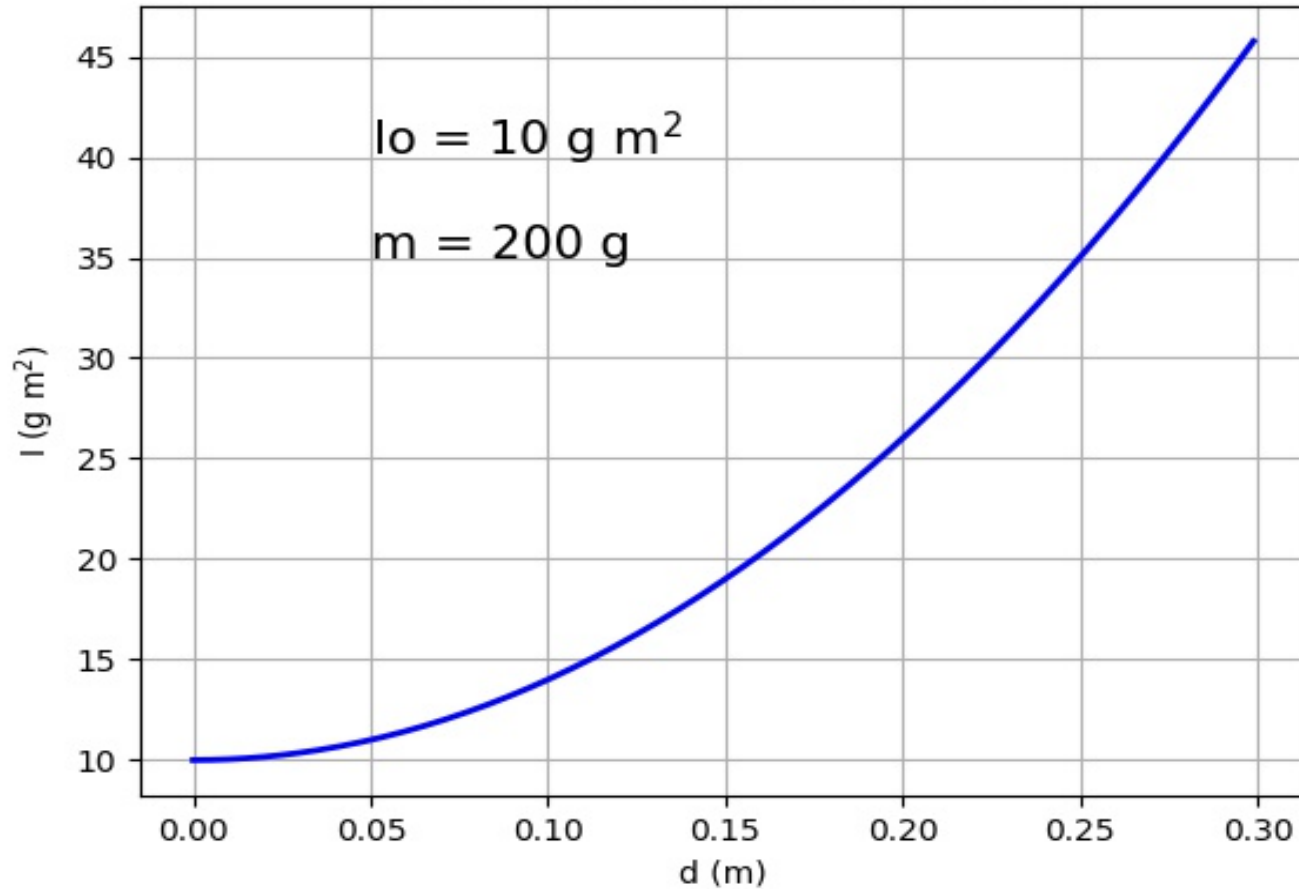
La pente de la droite = $-K/2$

```

1 # trace I en fonction de d pour la machine tournante - Johann Collot
2 # 02/05/2021
3 import matplotlib
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import numpy as np
6
7 # Data for plotting
8 g = 9.81
9 I0 = 1.e-02 # moment d'inertie initial
10 m = 0.2 # masse
11
12 d = np.arange(0.0, 0.3, 0.001) # array of distances
13 I = (I0 + 2.*d*d*m )*1000. # array of I ( g m^2)
14
15 fig, ax = plt.subplots()
16 ax.plot(d,I,'b-',linewidth=2.)
17
18 ax.set(xlabel=u"d (m)", ylabel=r"I (g m$^2$)",
19       title=r"Moment d'inertie en fonction de d")
20 ax.text(0.05,40, r"Io = 10 g m$^2$",
21       color='black', fontsize=15)
22 ax.text(0.05,35, r"m = 200 g",
23       color='black', fontsize=15)
24
25 ax.grid()
26 fig.savefig("MT_I1.jpg")
27 # plt.show()

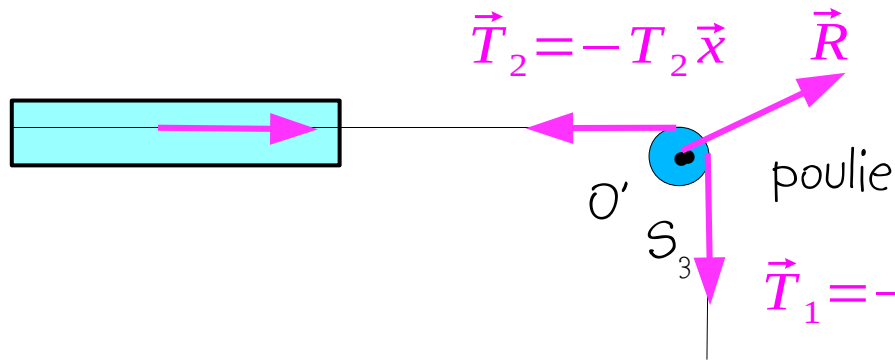
```

Moment d'inertie en fonction de d



Les deux masses additionnelles sont placées à la distance d du centre

Rien n'est simple : le frottement !



$$R_x = T_2$$

$$R_y = 0$$

$$R_z = (m + m_{S_3}) g$$

$$N = L = 0$$

torseur
de la liaison
pivot

$$\tau_{LP}^{S_3} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ N \vec{x} + C_f \vec{y} + L \vec{z} \end{array} \right\}_{O'/R}$$

avec frottement

Si le moment d'inertie de la poulie $\ll I$, alors le moment dynamique de la poulie peut être considéré comme nul.

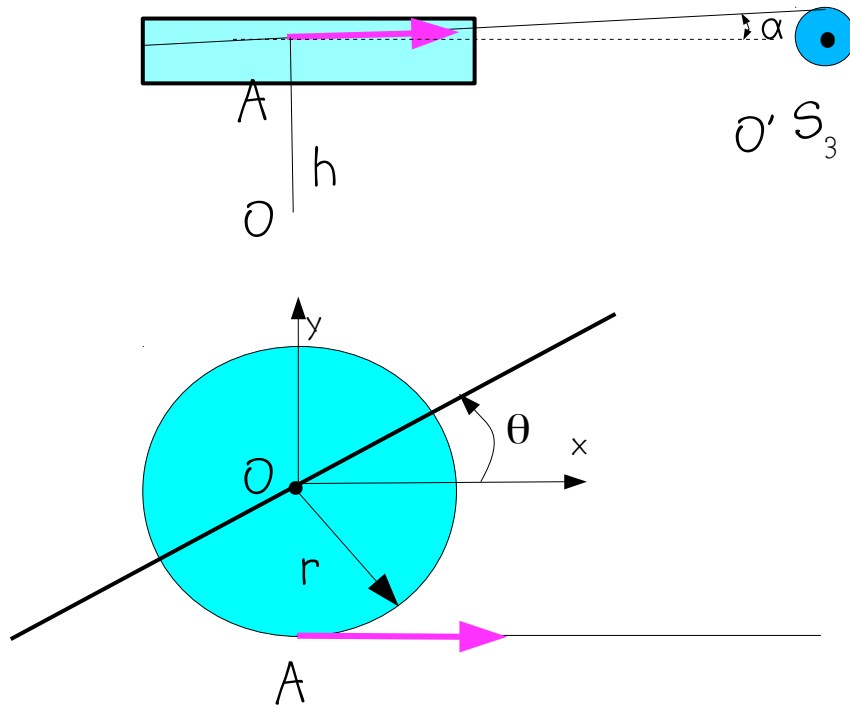
$$T_2 = m(g + \ddot{z}) - C_f / r_p$$

$$C_f = m_s g r_p$$

Expérimentalement on peut mettre en évidence le frottement on procédant avec de petites masses proches de zéro et en notant la masse m_s pour laquelle le mouvement commence.

Rien n'est simple : erreur d'alignement !

Si les enroulements ne sont pas perpendiculaires à $(0,z)$



$$\begin{aligned}\vec{M}_{\vec{T}_{MT}} &= \vec{OA} \wedge \vec{T}_{MT} \\ &= (h \vec{z} - r \vec{y}) \wedge (\cos \alpha T \vec{x} + \sin \alpha T \vec{z}) \\ &= r T \cos \alpha \vec{z} - r \sin \alpha T \vec{x} + h \cos \alpha T \vec{y}\end{aligned}$$

Réduit l'action motrice de la tension et du poids.
Génère un couple additionnel sur la liaison pivot qui peut augmenter le frottement et donc modifier l'équation horaire de la chute.

Théorème de l'énergie mécanique

On considère le système global $S_1+S_2+S_3$. Les tensions sont alors des forces internes. Les réactions ne se déplacent pas, donc ne travaillent pas. On néglige les frottements. La seule force externe qui travaille est le poids de m .

$$\Delta(T_c + U) = 0$$

$$\Rightarrow mg z_0 = mgz + \frac{I}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\dot{z}}{r}$$

$$\Rightarrow g(z_0 - z) = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{m r^2} + 1 \right) \dot{z}^2$$

$$-g \dot{z} = \left(\frac{I}{m r^2} + 1 \right) \dot{z} \ddot{z}$$

$$\ddot{z} = \frac{-g}{\left(\frac{I}{m r^2} + 1 \right)}$$

Plus rapide pour obtenir l'équation horaire.