

# Mouvement des solides indéformables :

## Introduction

# Plan du cours

- Introduction
- Cinématique des solides rigides
- Cinétique des solides rigides
- Principe fondamental de la dynamique
- Aspects énergétiques
- Méthode de résolution d'un problème de mécanique

## Solides indéformables

Un solide est indéformable si les points matériels qui le composent, demeurent à des distances mutuelles constantes dans le temps et ce quel que soit l'effort auquel il est soumis.

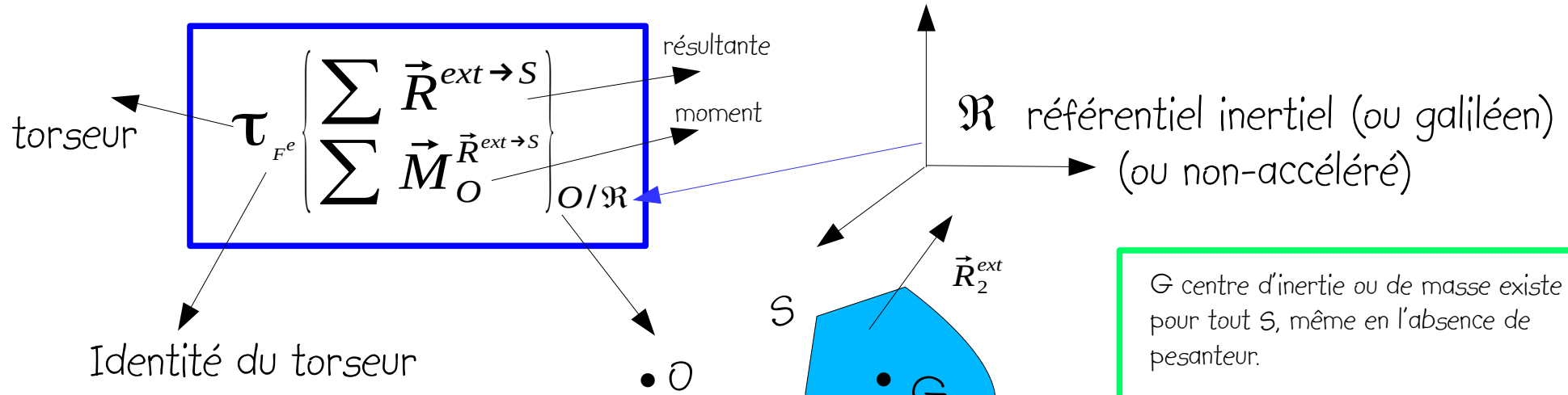
Dans bien des cas, ce modèle mathématique idéal constitue une approximation très proche de la réalité.

Les solides immobiles ou en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel inertiel (non-accélééré ou galiléen) sont le champ d'étude de la statique des solides (vue au premier semestre de la L2).

En conséquence, la masse totale et la masse volumique d'un solide indéformable sont constantes dans le temps.

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d(\vec{P})}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \quad \rho \text{ est la masse volumique}$$

Torseur des efforts extérieurs agissant sur  $S$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport à  $O$



Identité du torseur

Déplacement d'un torseur d'un point  $A$  à  $B$  dans le même référentiel :

$$\tau \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_B^{\vec{R}} \end{array} \right\}_{B/\mathcal{R}} \rightarrow \text{résultante invariante}$$

$$\vec{M}_B^{\vec{R}} = \vec{M}_A^{\vec{R}} + \vec{BA} \wedge \vec{R} \quad \text{BABAR}$$

$G$  centre d'inertie ou de masse existe pour tout  $S$ , même en l'absence de pesanteur.

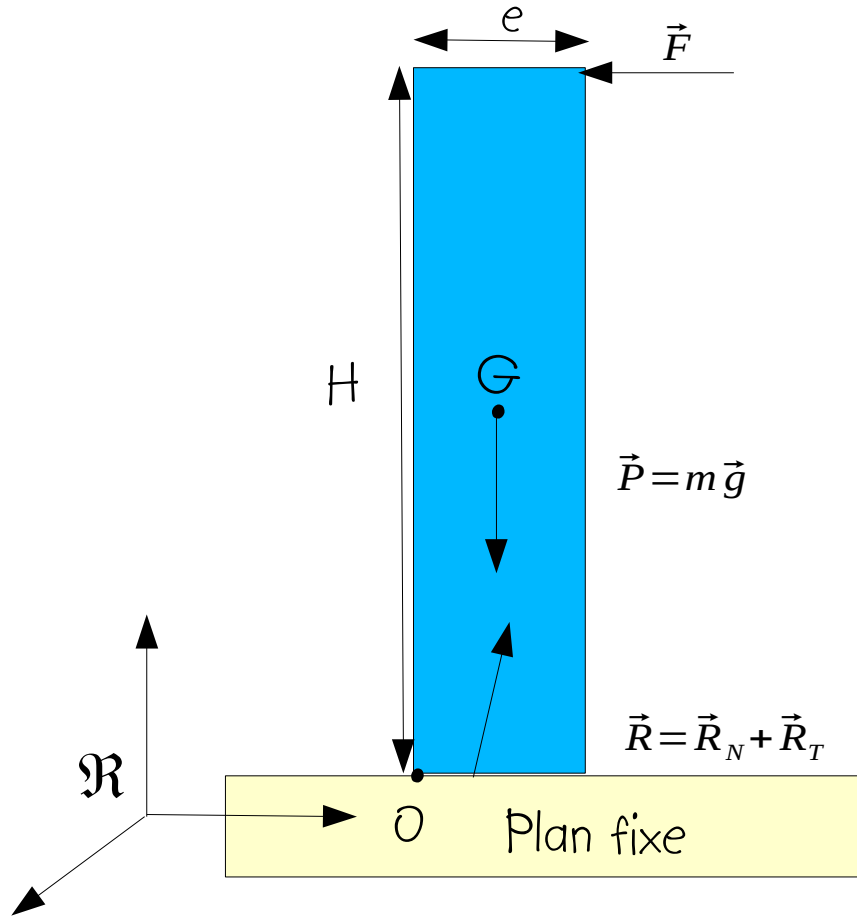
$$m \vec{OG} = \int_S \rho(M) \vec{OM} dV$$

ou encore

$$\int_S \rho(M) \vec{GM} dV = \vec{0}$$

masse volumique en  $M$

Exemple : Équilibre d'une plaque homogène parallélépipédique posée sur champ



$$\tau_{F^e} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} + \vec{P} + \vec{F} \\ \vec{M}_O^{\vec{R}} + \vec{M}_O^{\vec{P}} + \vec{M}_O^{\vec{F}} \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}}$$

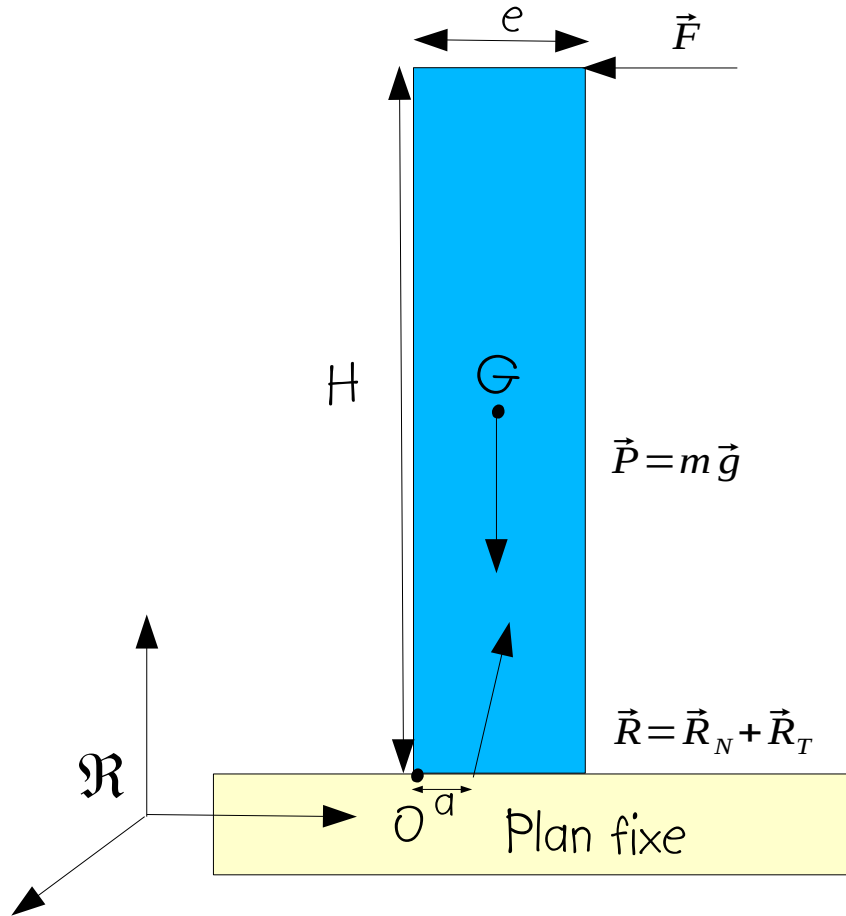
frottement statique :

$$R_T \leq \mu R_N$$

# Statique des solides indéformables

$$\tau_{F^e} \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{R}^{ext \rightarrow S} \\ \sum \vec{M}_O \vec{R}^{ext \rightarrow S} \end{array} \right\}_{0/\mathcal{R}} = \tau \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{0/\mathcal{R}}$$

Exemple : Équilibre d'une plaque homogène parallélépipédique posée sur champ



$$\mathcal{T}_{F^e} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} + \vec{P} + \vec{F} \\ \vec{M}_O^{\vec{R}} + \vec{M}_O^{\vec{P}} + \vec{M}_O^{\vec{F}} \end{array} \right\}_{0/\mathcal{R}} = \mathcal{T} \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{0/\mathcal{R}}$$

$$R_N = mg$$

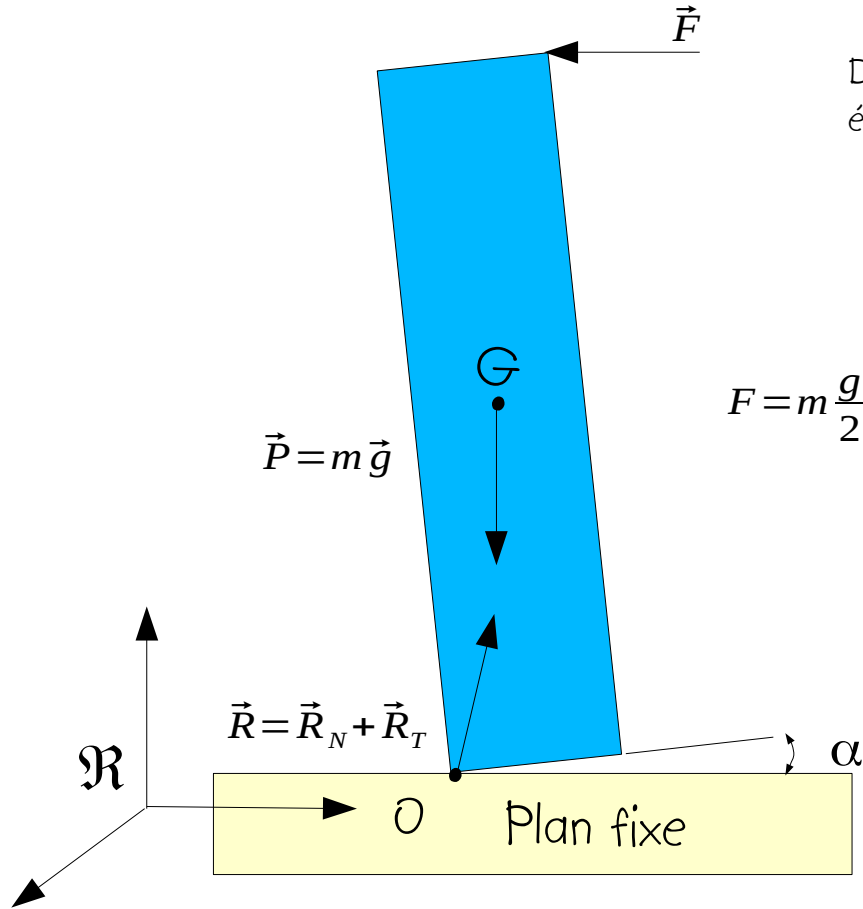
$$F = R_T \Rightarrow F \leq \mu mg \quad \text{sinon glissement sur le plan}$$

Dans un premier temps, le champ reste en contact avec le plan fixe, donc la réaction du plan se déplace vers  $O$ .

$$FH - mg \frac{e}{2} + mga = 0 \quad 0 \leq a \leq e/2$$

$$FH = mg \frac{e}{2} - mga \Rightarrow F \leq \frac{mge}{2H} \Rightarrow \frac{e}{2H} \leq \mu$$

## Exemple : Équilibre d'une plaque homogène parallélépipédique sur son arête

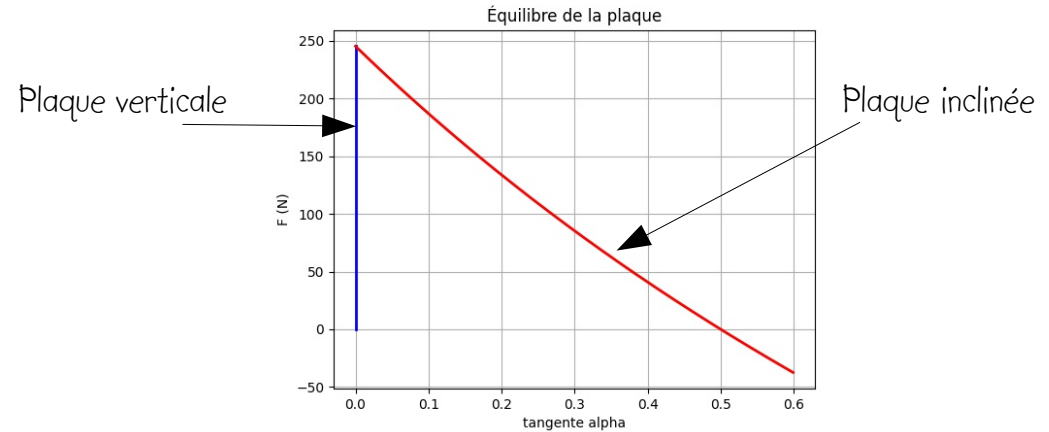


Dans un deuxième temps, le champ décolle et la plaque reste en équilibre. La réaction du plan s'applique au point  $O$ .

$$R_N = m g \quad F = R_T \Rightarrow F \leq \mu m g$$

$$(H \cos \alpha + e \sin \alpha) F - m g \frac{(e \cos \alpha - H \sin \alpha)}{2} = 0$$

$$F = m \frac{g}{2} \frac{(e \cos \alpha - H \sin \alpha)}{(H \cos \alpha + e \sin \alpha)} = m \frac{g}{2} \frac{(e - H \operatorname{tg} \alpha)}{(H + e \operatorname{tg} \alpha)} \geq 0 \Rightarrow \frac{e}{H} \geq \operatorname{tg} \alpha \geq 0$$





## Programme python3 pour représenter la courbe.

```
1 # trace F en fonction de la tangente alpha - Johann Collot
2 # 12/03/2021
3 import matplotlib
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import numpy as np
6
7 # Data for plotting
8 m = 100. # kg
9 H=1. # m
10 e=0.5 # m
11 g=9.81
12
13 tg = np.arange(0.0, 0.6, 0.001) # array of tangente alpha
14 F = m*g*0.5*( (e - H* tg) / (H+e*tg) ) # array of Force en N
15
16 Fmax = m*g*0.5*e/H
17
18 fig, ax = plt.subplots()
19 ax.plot([0,0],[0,Fmax],'b-',tg,F,'r-',linewidth=2.)
20
21 ax.set(xlabel=u"tangente alpha", ylabel=u"F (N)",
22       title=u"Équilibre de la plaque")
23 ax.grid()
24 fig.savefig("F-Tangente-Alpha.jpg")
25 # plt.show()
```

**MESSAGE : APPRENDRE À PROGRAMMER CAR C'EST INDISPENSABLE EN SCIENCE !**

# Principe fondamental de la dynamique

$$\tau_{F^e} \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{R}^{ext \rightarrow S} \\ \sum \vec{M}_O^{\vec{R}^{ext \rightarrow S}} \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}} = \tau_D \left\{ \begin{array}{l} m \vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^G \\ \vec{\delta}_O^S \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}}$$

Torseur dynamique

Moment dynamique de S

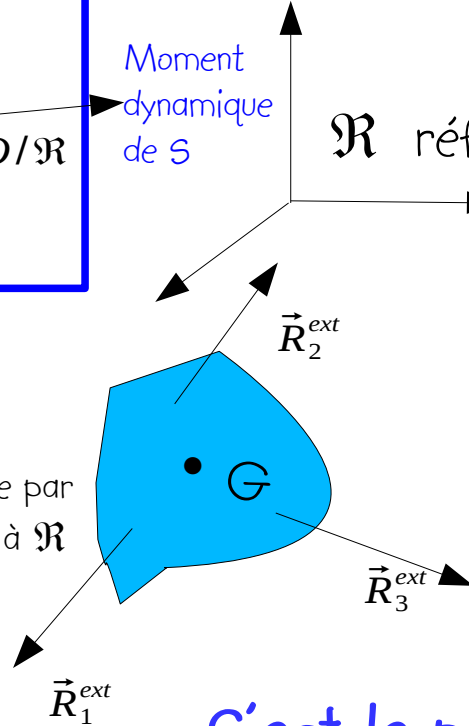
$\mathcal{R}$  référentiel inertiel (ou galiléen)  
(ou non-accélééré)

$$\tau_c \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \int_S \rho(M) \vec{V}_{/\mathcal{R}}^M dV = m \vec{V}_{/\mathcal{R}}^G \\ \vec{L}_O = \int_S \vec{OM} \wedge \rho(M) \vec{V}_{/\mathcal{R}}^M dV \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}}$$

Torseur cinétique

$\bullet O$

Point fixe par rapport à  $\mathcal{R}$



G centre d'inertie ou de masse existe pour tout S, même en l'absence de pesanteur.

$$m \vec{OG} = \int_S \rho(M) \vec{OM} dV$$

$$\tau_D \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{P}}{dt} = m \vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^G \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\delta}_O^S \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}}$$

C'est le programme de ce cours

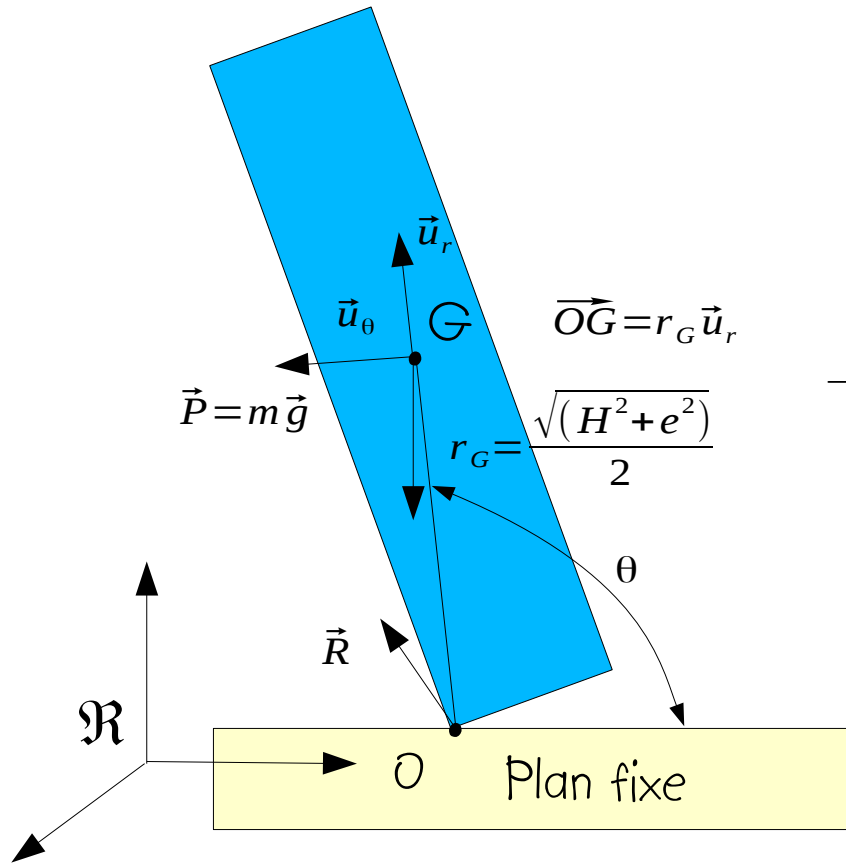
$$\tau_{F^e} \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{R}^{ext \rightarrow S} \\ \sum \vec{M}_O^{\vec{R}^{ext \rightarrow S}} \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}} = \tau_D \left\{ \begin{array}{l} m \vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^G \\ \vec{\delta}_O^S \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}}$$

Causes du mouvement

Description du mouvement

Soit l'on connaît le mouvement et on en déduit les causes, ou au contraire l'on connaît les causes et l'on en déduit le mouvement.

Exemple : On pousse un peu trop, la plaque bascule et chute !



$$\mathcal{T}_{F^e} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} + \vec{P} \\ \vec{M}_O^{\vec{R}} + \vec{M}_O^{\vec{P}} \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}} = \mathcal{T}_D \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{P}}{dt} = m \vec{\Gamma}_{G/\mathcal{R}} \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}}$$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$  Chaque point de la plaque a un mouvement circulaire accéléré vers le bas.

$$-m g r_G \cos \theta = \frac{d}{dt} (I \omega) = \frac{m}{3} (H^2 + e^2) \dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \ddot{\theta} = -\frac{3}{4} \frac{g}{r_G} \cos \theta$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi - \text{artg}\left(\frac{e}{H}\right)$$

$$\text{À } t=0 \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = 0$$

$$-m r_G \omega^2 = -m g \sin \theta + R_r \Rightarrow R_r = m (g \sin \theta - r_G \omega^2)$$

$$m r_G \dot{\omega} = -m g \cos \theta + R_\theta \Rightarrow R_\theta = \frac{m g}{4} \cos \theta$$

Le mouvement peut être programmé sur ordinateur, on initialise à  $t = 0$  par  $\theta = \pi/2 + \varepsilon$

C'est nouveau ! Joue le rôle de la quantité de mouvement pour une rotation. I est le moment d'inertie.

## Programme python de calcul du mouvement de chute

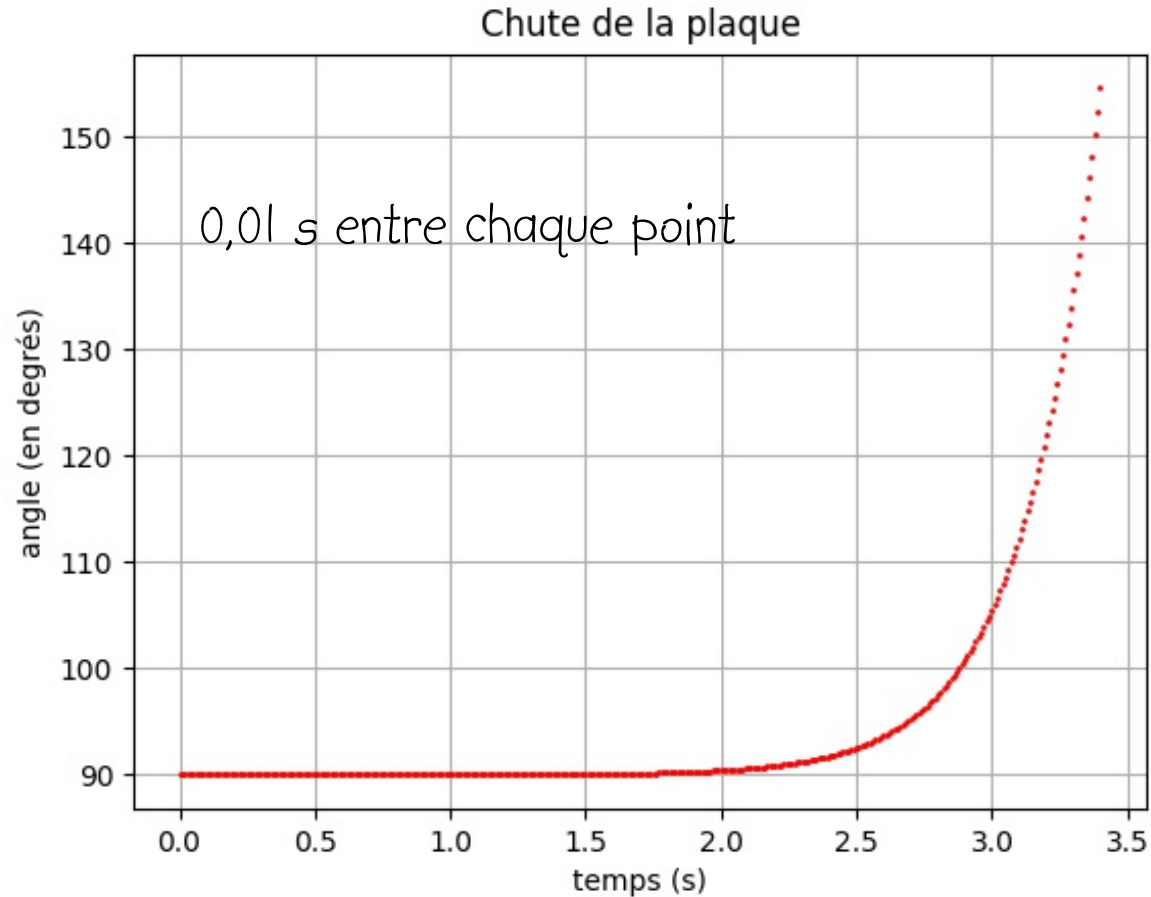
```
1 # Chute de la plaque - Johann Collot
2 # 14/03/2021
3 import matplotlib
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import numpy as np
6 import math as m
7
8 # Data for plotting
9
10 H=1. # m
11 e=0.5 # m
12 g=9.81
13
14 w=0. # vitesse angulaire
15 wp=0. # accélération angulaire
16 theta=m.pi/2. + 0.00001 # valeur initiale de l'angle
17 rg=m.sqrt(H**2+e**2)/2. # rayon du centre de masse
18 thetamax = m.pi - m.atan(e/H) # angle max.
19 deltat = 0.01 # increment temporel
20 t=0. # temps initial
21
22 at=[0.] # tableau des temps
23 atheta=[theta*180./m.pi] # tableau des angles
24 i=0
25
26 while theta < thetamax :
27     wp= -0.75 *g/rg*m.cos(theta)
28     w=w+wp*deltat
29     theta=theta+w*deltat
30     t=t+deltat
31     at.append(t)
32     atheta.append(theta*180./m.pi)
33     i=i+1
34 print ("nombre de points :", i)
35 fig, ax = plt.subplots()
36 ax.plot(at,atheta,'r.',ms=2.)
37
38 ax.set(xlabel=u"temps (s)", ylabel=u"angle (en degrés)",
39        title=u"Chute de la plaque")
40 ax.grid()
41 fig.savefig("Chute-Plaque.jpg")
```

## Exemple : Brutale sera la chute !

Message aux  
scientifiques en herbe :

Il serait bon que vous  
appreniez à produire  
cela sur un ordinateur.

Ce modèle peut être utilisé  
pour estimer le temps  
de chute de nombreux  
corps : arbres, poteaux,  
tours ...



Pour en savoir plus :

-Mécanique générale : Christian Gruber, Presses polytechniques romandes

-Mécanique, J.Ph. Pérez, Masson

-Rappels de mécanique du point matériel :

- <http://lpsc.in2p3.fr/images/collot/PFD.pdf>
- [http://lpsc.in2p3.fr/images/collot/Cinematique\\_\\_L1.pdf](http://lpsc.in2p3.fr/images/collot/Cinematique__L1.pdf)
- <http://lpsc.in2p3.fr/images/collot/Forces.pdf>
- <http://lpsc.in2p3.fr/images/collot/MomentCinetique.pdf>

-Modules Python

- <https://matplotlib.org/>
- <https://numpy.org/>