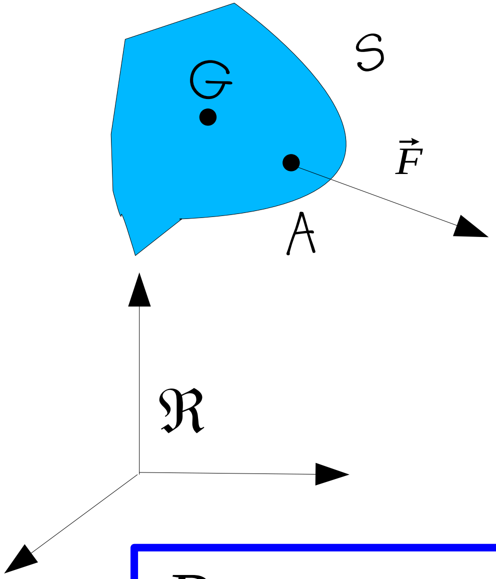
Aspects énergétiques :

du mouvement des solides indéformables

Énoncé torsoriel de la puissance d'une force appliquée à un solide rigide



Force dont le point d'application est A appartenant au solide

$$P_{F/\Re}=\vec{F}\cdot\vec{V}^{A}=\vec{F}\cdot(\vec{V}^{G}+\vec{\Omega}_{S/\Re}\wedge\overrightarrow{GA})=\vec{F}\cdot\vec{V}^{G}+\vec{\Omega}_{S/\Re}\cdot(\overrightarrow{GA}\wedge\vec{F})$$

propriété du produit mixte

$$P_{F/\Re}=\vec{F}\cdot\vec{V}^{G}+\vec{\Omega}_{S/\Re}\cdot\vec{M}_{\vec{F}/G}$$

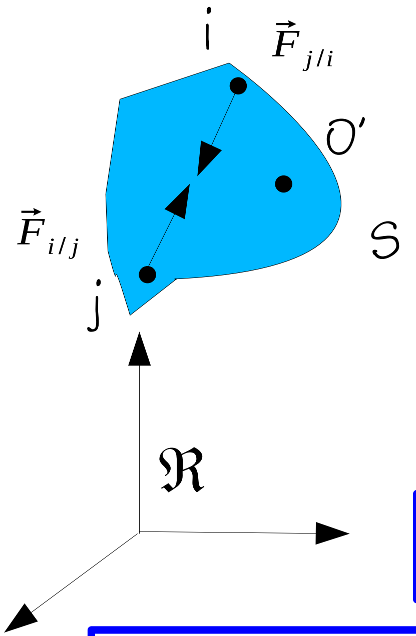
$$\tau_F\begin{Bmatrix}\vec{F}\\ \vec{M}_{\vec{F}/G}\end{Bmatrix}_{G/\Re} \qquad \tau_V\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/\Re}\\ \vec{V}^{G}\end{Bmatrix}_{G/\Re}$$

$$\boxed{P_{F/\Re}=\tau_F\otimes\tau_V}$$

La puissance d'une force appliquée à un solide rigide est le comoment du torseur de cette force et du torseur cinématique du solide. Unité le J/s = W .

Cette relation est applicable à tout effort extérieur ou intérieur (efforts répartis, de liaison...).

Puissance des forces intérieures d'un solide rigide



$$\tau_{int} = \tau_{i/j} + \tau_{j/i} = 0$$

Principe d'action et de réaction

Torseur des forces intérieures

$$P_{int/\Re} = \vec{F}_{i/j} \cdot \vec{V}^{j} + \vec{F}_{j/i} \cdot \vec{V}^{i}$$

$$\vec{V}^{M} = \vec{V}^{O'} + \vec{\Omega}_{S/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$P_{int/\Re} = \vec{F}_{i/j} \cdot \vec{V}^{O'} + \vec{F}_{j/i} \cdot \vec{V}^{O'} + \vec{F}_{i/j} \cdot (\vec{\Omega}_{S/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}_j) + \vec{F}_{j/i} \cdot (\vec{\Omega}_{S/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}_i)$$

propriété du produit mixte

$$P_{int/\Re} = (\vec{F}_{i/j} + \vec{F}_{j/i}) \cdot \vec{V}^{O'} + \vec{\Omega}_{S/\Re} \cdot ((\overrightarrow{O'M}_j \wedge \vec{F}_{i/j}) + (\overrightarrow{O'M}_i \wedge \vec{F}_{j/i}))$$

0 car $\tau_{int} = 0$ 0

$$\boxed{P_{int} = 0}$$

La puissance de la somme de toutes les forces intérieures d'un solide rigide est nulle.

Lorsqu'un système est constitué de plusieurs solides rigides, seule la puissance des efforts intérieurs de contact entre ces solides (liaisons internes) est non nulle si ces contacts sont AVEC FROTTEMENT ET GLISSEMENT..

Exercice

Montrer que la puissance d'une force de contact entre deux solides rigides est nulle si la liaison est sans frottement.

Montrer que la puissance d'une force de contact entre deux solides rigides est non nulle si celle-ci se produit avec frottement ET glissement.

Indice : on s'intéressera à la puissance des forces de contact tangentielles sachant que les vitesses au point de contact sont nécessairement tangentielles.

Travail

Le travail est l'énergie fournie ou consommée lors du déplacement d'une force.

$$\boxed{dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{V}\,dt = P\,dt}$$

unité le Joule , J .

Solide rigide unique : $\boxed{dW = P_{ext}\,dt}$ seule la puissance des forces extérieures agit

$dW > 0$ travail moteur

$dW < 0$ travail résistant

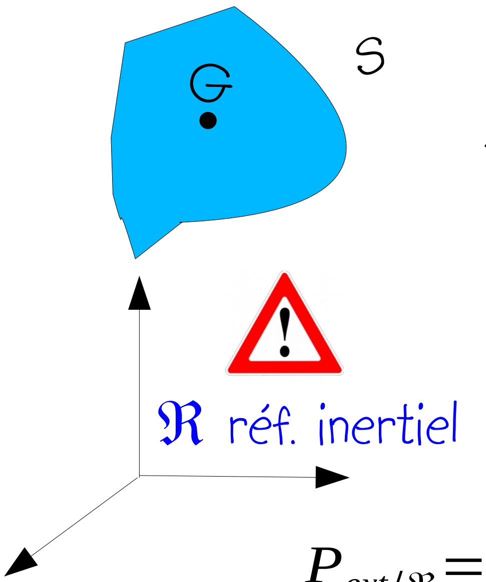
Système constitué de plusieurs solides rigides :

$$\boxed{dW = (P_{ext} + P_{int})\,dt}$$

Puissance des efforts de liaison entre solides

Si toutes ces liaisons sont sans frottement ou sans glissement, $P_{int} = 0$.

Théorème de l'énergie cinétique



$$\int_S \vec{\Gamma}^M_{/\Re}\, dm(M) = m\,\vec{\Gamma}^G_{/\Re}$$ résultante du moment dynamique

PFD / ℜ $$\sum \vec{F}_{ext\rightarrow S} = m\,\vec{\Gamma}^G_{/\Re} = \int_S \vec{\Gamma}^M_{/\Re}\, dm(M) = \int_S d\vec{F}_{ext}(M)$$

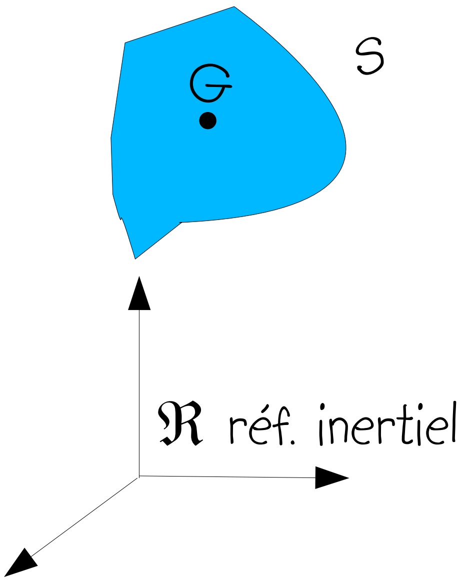
$\vec{\Gamma}^M_{/\Re}$ Agit comme la densité massique des efforts extérieurs.

$$P_{ext/\Re} = \int_S d\vec{F}_{ext}(M)\cdot\vec{V}^M = \int_S \vec{\Gamma}^M_{/\Re}\cdot\vec{V}^M\, dm(M) = \int_S \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(\vec{V}^M)^2\right) dm(M)$$

$$= \frac{d}{dt} T_{S/\Re} = \dot{T}_{S/\Re}$$

Énergie cinétique de S / ℜ

Théorème de l'énergie cinétique



$$\boxed{P_{ext/\Re} = \dot{T}_{S/\Re}}$$

Pour un solide rigide unique

$$dW = P_{ext/\Re}\,dt = d\,T_{S/\Re}$$

Pour un système constitué de plusieurs solides rigides

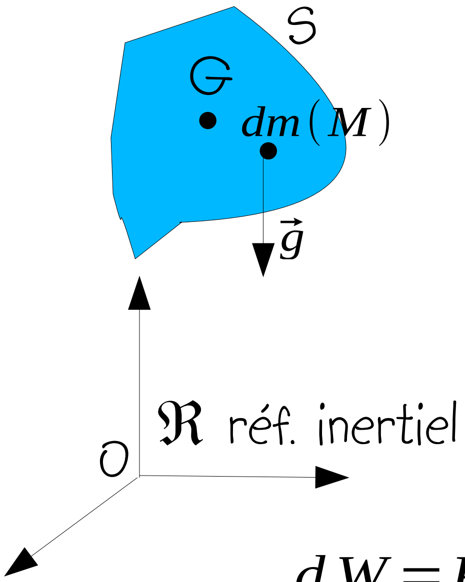
$$\boxed{P_{ext/\Re} + P_{int/\Re} = \dot{T}_{S/\Re}}$$

$$dW = (P_{ext/\Re} + P_{int/\Re})\,dt = d\,T_{S/\Re}$$

$P_{int/\Re} = 0$ Si toutes les liaisons internes sont sans frottement ou sans glissement.

Ce théorème ne s'applique que dans un référentiel inertiel !

Énergie potentielle



exemple : pesanteur

$$P_{ext/\mathfrak{R}} = \int_S \vec{g} \cdot \vec{V}^M dm(M) = \vec{g} \cdot \int_S \vec{V}^M dm(M)$$

$$= m\,\vec{g} \cdot \vec{V}^G = m\,\vec{g} \cdot \dot{\overrightarrow{OG}} = -\frac{d}{dt}\left(-m\,\vec{g} \cdot \overrightarrow{OG}\right)$$

$$d\,W = P_{ext/\mathfrak{R}}\,dt = -d\left(-m\,\vec{g} \cdot \overrightarrow{OG}\right)$$

Énergie potentielle

$$d\,W = P_{ext/\mathfrak{R}}\,dt = -d(U) \qquad U = -m\,\vec{g} \cdot \overrightarrow{OG} + cte = m\,g\,z_G + cte$$

$$\boxed{\Delta W = -\Delta U} \qquad \boxed{d(U) = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \;\Rightarrow\; \vec{F} = -\overrightarrow{grad}(U)}$$

Une force dérivant d'un potentiel est dite conservative.

Énergie mécanique

Pour un système soumis uniquement à des forces dérivant d'un potentiel on a :

$$\Delta W = -\Delta U = \Delta T_{S/\mathfrak{R}} \Rightarrow \Delta U + \Delta T_{S/\mathfrak{R}} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\left(\underbrace{U + T_{S/\mathfrak{R}}}_{\text{Énergie mécanique}}\right) = 0}$$

Si un système est soumis à d'autres forces (non conservatives), alors :

$$\boxed{\Delta\left(U + T_{S/\mathfrak{R}}\right) = \Delta W_{NC}}$$

La variation d'énergie mécanique d'un système est égale au travail des forces (extérieures et intérieures) non conservatives.

Pour en savoir plus :

-Mécanique générale : Christian Gruber, Presses polytechniques romandes

-Mécanique, J.Ph. Pérez, Masson

-Mécanique , J.-L. Teyssier, J.-P. Ducourtieux, J.-P. Moliton, Armand Collin

-http://lpsc.in2p3.fr/images/collot/TPE.pdf