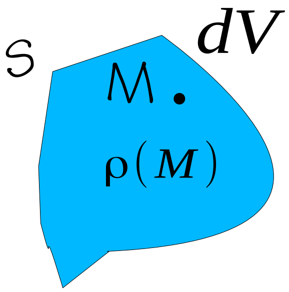
Cinétique des solides indéformables :

Étude des grandeurs et entités mathématiques permettant de prendre en compte la répartition des masses d'un solide rigide dans la description de son mouvement, sans en considérer la cause

Masse

La masse mesure la quantité de matière d'un corps et ce quelle que soit sa composition chimique. Elle quantifie également son inertie, sa résistance à la modification de son mouvement, exprimée par la deuxième loi de Newton : $\vec{F}=m\vec{\gamma}$



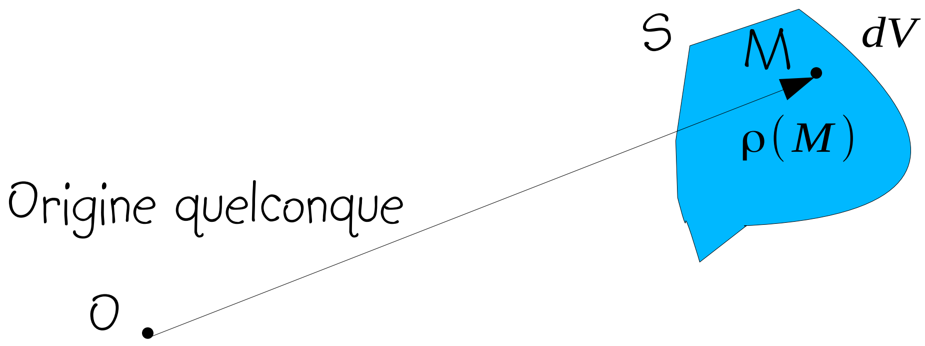
$$m=\int_S dm(M)=\int_S \rho(M)\,dV=cte$$

$\rho(M)$ peut dépendre de M, mais pas du temps pour un solide rigide.

S est dit homogène si sa masse volumique est la même en tout point. $\rho(M)=\rho$

S a un élément de symétrie si : $\forall\ M \in S\ \exists\ M' \in S$ tel que $\rho(M)=\rho(M')$

Centre de masse ou d'inertie



G centre d'inertie ou de masse existe pour tout solide, même en l'absence de pesanteur.

$$m\,\overrightarrow{OG}=\int_S \rho(M)\,\overrightarrow{OM}\,dV$$

ou encore

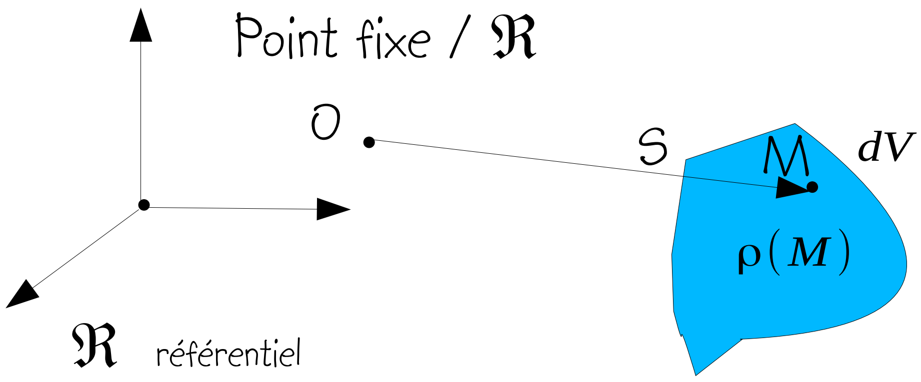
$$\int_S \rho(M)\,\overrightarrow{GM}\,dV=\vec{0}$$

G ne dépend ni du temps ni de O

Si S possède un élément de symétrie (point, axe, plan) alors G en fait nécessairement partie.

Quantité de mouvement d'un solide

$$\boxed{\vec{P}_{S/\mathfrak{R}} = \int_S d\vec{P}(M)_{/\mathfrak{R}} = \int_S \vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}\, dm(M) = \int_S \vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}\, \rho(M)\, dV}$$



$$m \left.\frac{d(\overrightarrow{OG})}{dt}\right|_{/\mathfrak{R}} = \int_S \left.\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}\right|_{/\mathfrak{R}} \rho(M)\, dV$$

ou encore

$$\boxed{m\vec{V}^G_{/\mathfrak{R}} = \int_S \vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}\, \rho(M)\, dV = \vec{P}_{S/\mathfrak{R}}}$$

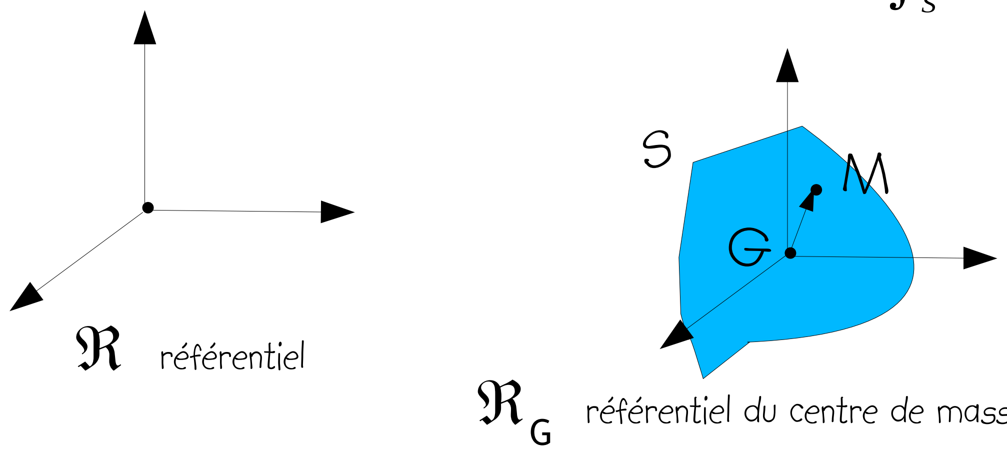
Cette égalité ne dépend plus de O !

Si l'on ne s'intéresse pas à la rotation intrinsèque du solide autour de G, l'étude du mouvement d'un solide peut être ramenée à celle de son centre de masse dotée de la masse totale du solide.

Quantité de mouvement d'un solide dans le référentiel du centre de masse (ou de König)

Les axes de $\Re_G$ restent // à ceux de $\Re$. À un instant t, $\Re_G$ est translaté par rapport à $\Re$.

$$\vec{0}=\int_S \left.\frac{d(\overrightarrow{GM})}{dt}\right|_{/\Re_G} \rho(M)\,dV=\int_S \vec{V}^M_{/\Re_G}\,\rho(M)\,dV=\vec{P}_{S/\Re_G}$$

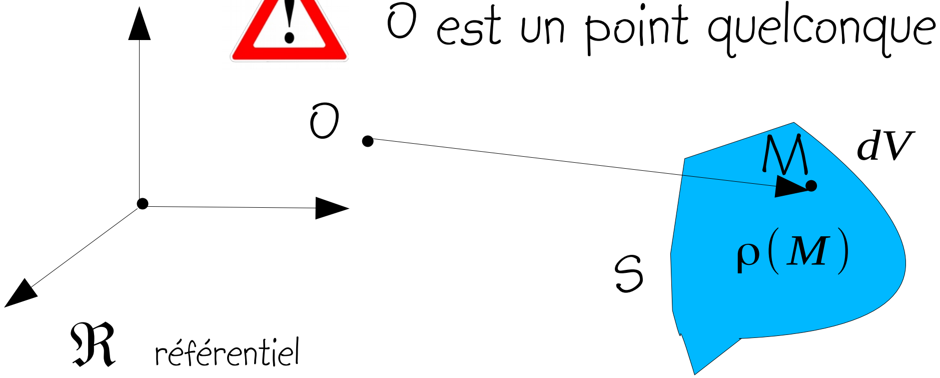


La quantité de mouvement d'un solide dans le référentiel du centre de masse est nulle à tout moment.

Moment cinétique de S par rapport à un point O

$$\boxed{\vec{L}_{S/O}=\int_S d\vec{L}(M)_{/O}=\int_S \overrightarrow{OM}\wedge d\vec{P}(M)_{/\Re}=\int_S \overrightarrow{OM}\wedge \vec{V}^M_{/\Re}\,dm(M)=\int_S \overrightarrow{OM}\wedge \vec{V}^M_{/\Re}\,\rho(M)\,dV}$$

O est un point quelconque



$$\vec{L}_{S/O}=\int_S (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM})\wedge d\vec{P}(M)_{/\Re}$$

$$\vec{L}_{S/O}=\int_S \overrightarrow{OA}\wedge d\vec{P}(M)_{/\Re}+\int_S \overrightarrow{AM}\wedge d\vec{P}(M)_{/\Re}$$

$$\vec{L}_{S/O}=\overrightarrow{OA}\wedge\int_S d\vec{P}(M)_{/\Re}+\int_S \overrightarrow{AM}\wedge d\vec{P}(M)_{/\Re}$$

$$\vec{L}_{S/O}=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{P}_{S/\Re}+\vec{L}_{S/A}$$

$$\boxed{\vec{L}_{S/A}=\vec{L}_{S/O}+\overrightarrow{AO}\wedge\vec{P}_{S/\Re}}$$

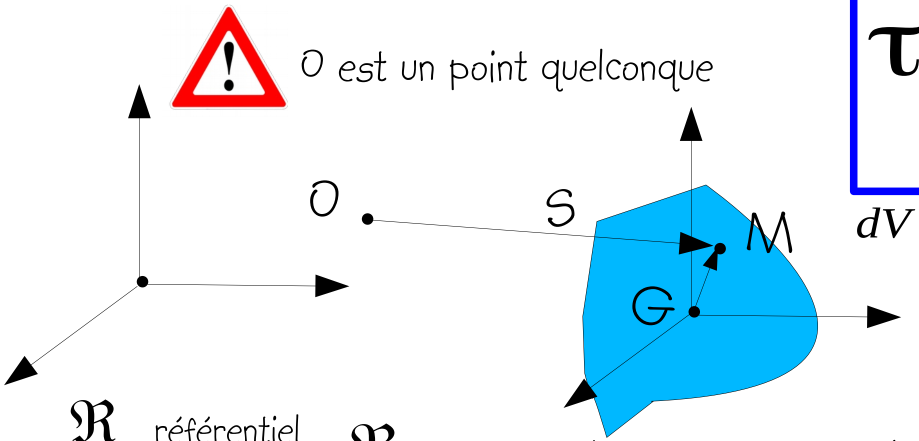
Correspond à la loi de déplacement d'un moment de torseur de O en A. Le torseur en question est le torseur cinétique.

Torseur cinétique d'un solide indéformable

Torseur cinétique dans le référentiel $\Re$

$$\tau_C \begin{Bmatrix} \vec{P}_{S/\Re} = m \vec{V}^{G}_{/\Re} \\ \vec{L}_{S/O} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \rho(M) \vec{V}^{M}_{/\Re} \, dV \end{Bmatrix}_{O/\Re}$$

Quantité de mouvement du solide



$\Re$ référentiel

$\Re_G$ référentiel du centre de masse (ou de König)

Moment cinétique du solide

$$\vec{L}_{S/A} = \vec{L}_{S/O} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{P}_{S/\Re}$$

$$\tau_C \begin{Bmatrix} \vec{P}_{S/\Re_G} = \vec{0} \\ \vec{L}_{S} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \rho(M) \vec{V}^{M}_{/\Re_G} \, dV \end{Bmatrix}_{\Re_G}$$

Torseur cinétique dans le référentiel de son centre de masse

Exercices

Montrer que dans le référentiel du centre masse, le moment cinétique d'un solide ne dépend pas du point où on le calcule.

Montrer que le moment cinétique d'un solide calculé par rapport à son centre de masse G dans le référentiel $\Re$, est égal au moment cinétique de ce solide dans son référentiel du centre de masse.

Premier Théorème de König (1712-1757)

$$\boxed{\vec{L}_{S/A} = \vec{L}_{S/G} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}^{G}_{/\Re}}$$

moment cinétique intrinsèque

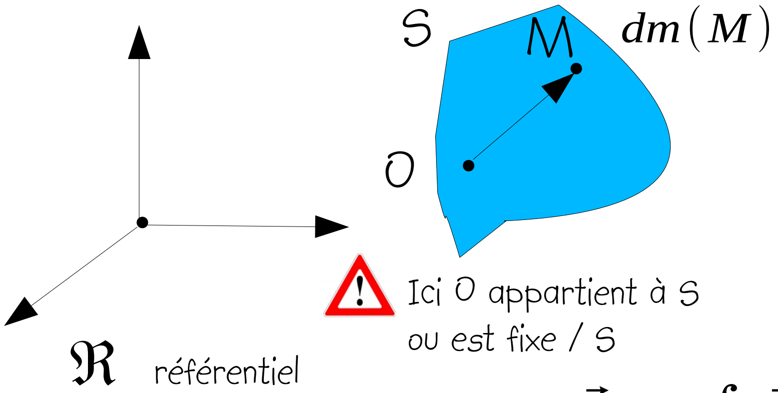
moment cinétique orbital

Torseur et moment cinétiques, suite ...

La résultante du torseur cinétique est facile à déterminer ou calculer, c'est le produit de sa masse par la vitesse du centre de masse (quantité de mouvement du solide).

Nous allons chercher à simplifier la détermination du moment cinétique pour contourner le recours aux intégrales de produits vectoriels.

Moment cinétique d'un solide indéformable, suite



Ici O appartient à S
ou est fixe / S

Rappel : $\vec{V}^{M}_{/\Re} = \vec{V}^{O}_{/\Re} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

Translation Rotation

$$\vec{L}_{S/O} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}^{M}_{/\Re} \, dm(M)$$

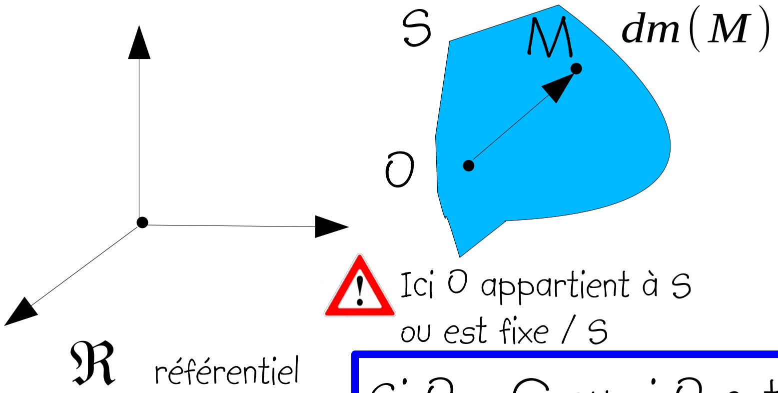
$$\vec{L}_{S/O} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{V}^{O}_{/\Re} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \, dm(M)$$

$$\vec{L}_{S/O} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}^{O}_{/\Re} \, dm(M) + \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \, dm(M)$$

$$\vec{L}_{S/O} = \left(\int_S \overrightarrow{OM} \, dm(M)\right) \wedge \vec{V}^{O}_{/\Re} + \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \, dm(M)$$

$$\vec{L}_{S/O} = m \, \overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}^{O}_{/\Re} + \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \, dm(M)$$

Moment cinétique d'un solide indéformable, suite



Ici O appartient à S
ou est fixe / S

$$\vec{L}_{S/O} = m\,\overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}^{O}_{/\Re} + \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})\, dm(M)$$

Moment cinétique de translation

Moment cinétique de rotation

Si O = G ou si O est un point fixe par rapport à $\Re$, alors le moment cinétique de translation est nul.

$I_{S/O} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (\ldots \wedge \overrightarrow{OM})\, dm(M)$ est l'opérateur ou le tenseur d'inertie de S par rapport à O.

$$\vec{L}_{S/O} = m\,\overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}^{O}_{/\Re} + I_{S/O}\,\vec{\Omega}$$

Exercices

Montrer que l'opérateur d'inertie est linéaire, c-à-d : $I_{S/O}(\lambda\vec{v}+\mu\vec{u})=\lambda I_{S/O}\vec{v}+\mu I_{S/O}\vec{u}$

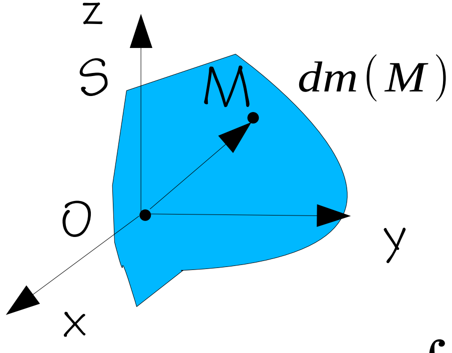
Montrer que l'opérateur d'inertie est symétrique, c-à-d : $\vec{v}\cdot I_{S/O}\vec{u}=\vec{u}\cdot I_{S/O}\vec{v}$

Rappel : $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Alors dans un repère orthonormé direct, l'opérateur d'inertie peut être représenté par une matrice 3x3 symétrique.

Matrice d'inertie

Tout comme sa masse, l'opérateur d'inertie d'un solide rigide en un point, et par conséquent sa matrice ne dépendent pas de l'état du mouvement. On peut donc les déterminer dans un repère lié au solide au repos dont l'origine est le point O.



Pour alléger l'écriture, on utilisera le même symbole I pour représenter l'opérateur d'inertie et sa matrice.

$$I_{ij} = \vec{e}_i \cdot I_{S/O} \vec{e}_j = I_{ji} \qquad \Rightarrow I_{ij} = \int_S \vec{e}_i \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{e}_j \wedge \overrightarrow{OM})) dm(M)$$

$$I_{ij} = \int_S \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j OM^2 - \overrightarrow{OM} (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_j)) dm(M)$$

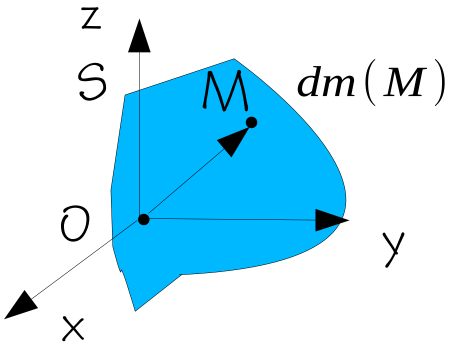
Symbole de Kronecker

$i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0 \quad ; \quad i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1$

$$I_{ij} = \int_S [\delta_{ij} OM^2 - (\vec{e}_i \cdot \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_j)] dm(M)$$

$$I_{ij} = \int_S [\delta_{ij} (x^2 + y^2 + z^2) - (\vec{e}_i \cdot \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_j)] dm(M)$$

Matrice d'inertie, suite



$$I_{ij}=\int_S[\delta_{ij}(x^2+y^2+z^2)-(\vec{e}_i\cdot\vec{OM})(\vec{OM}\cdot\vec{e}_j)]dm(M)$$

Si i=j

$$I_{ii}=\int_S[(x^2+y^2+z^2)-(\vec{e}_i\cdot\vec{OM})^2]dm(M)$$

$$I_{11}=\int_S[(x^2+y^2+z^2)-x^2]dm(M)=\int_S(y^2+z^2)dm(M)$$

Carré de la distance de M à l'axe (O,x)

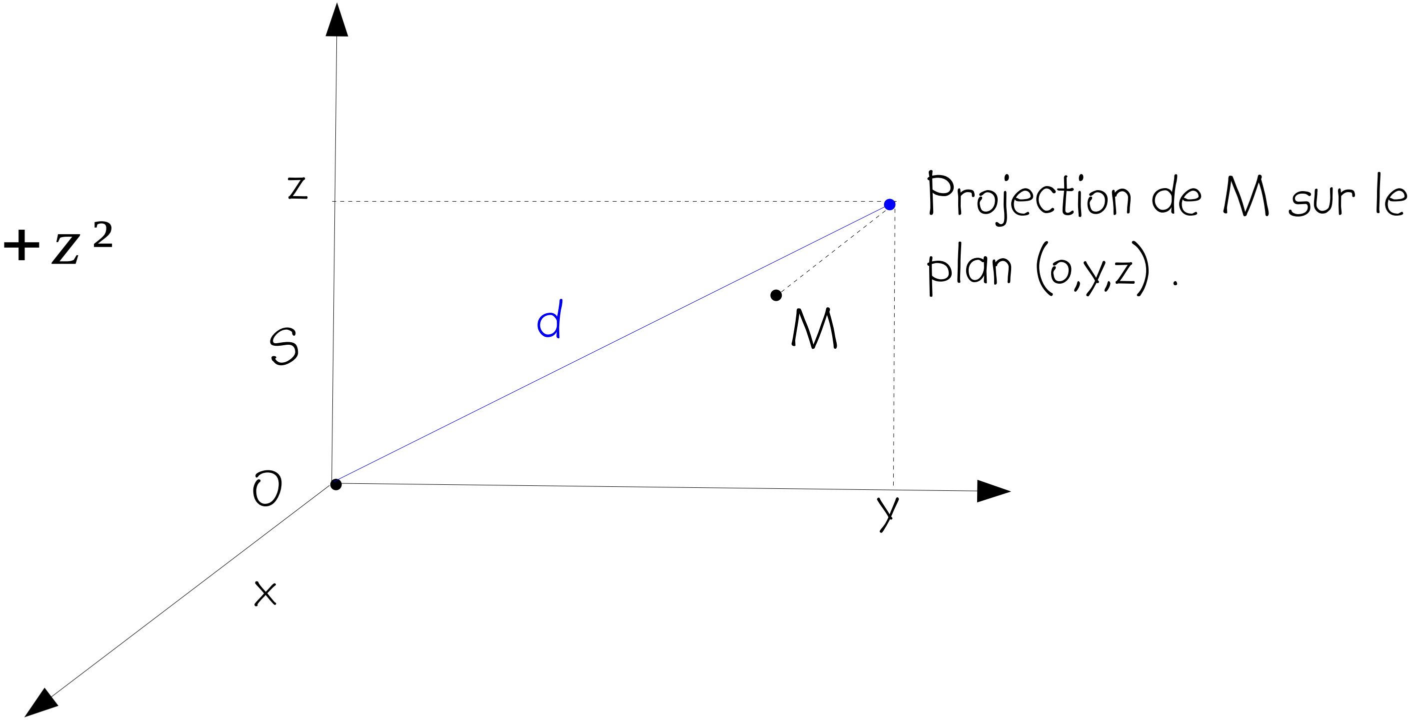
Moment d'inertie de S par rapport à l'axe (O,x)

$$I_{22}=\int_S(x^2+z^2)dm(M)$$ Moment d'inertie de S par rapport à l'axe (O,y)

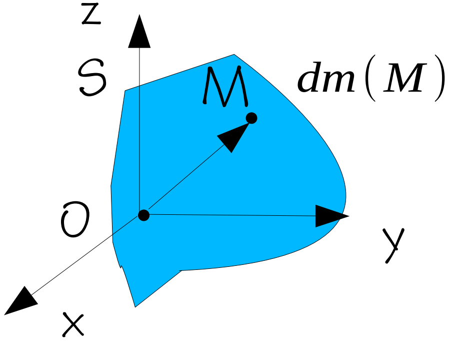
$$I_{33}=\int_S(x^2+y^2)dm(M)$$ Moment d'inertie de S par rapport à l'axe (O,z)

Distance de M à l'axe (0,x)

$$d^2 = y^2 + z^2$$



Matrice d'inertie, suite



$$I_{ij}=\int_S [\delta_{ij}(x^2+y^2+z^2)-(\vec{e}_i\cdot\overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e}_j)]\,dm(M)$$

Si $i\neq j$

$$I_{ij}=-\int_S (\vec{e}_i\cdot\overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e}_j)\,dm(M)$$

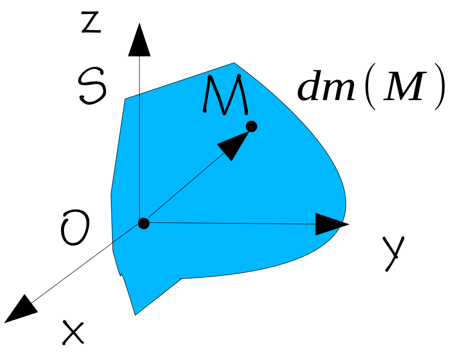
$$I_{12}=I_{21}=-\int_S xy\,dm(M)$$

$$I_{13}=I_{31}=-\int_S xz\,dm(M)$$

$$I_{23}=I_{32}=-\int_S yz\,dm(M)$$

Produits d'inertie de S

Matrice d'inertie, récapitulatif



$$I=\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

$$I_{11}=\int_S (y^2+z^2)\,dm(M)=A$$

$$I_{22}=\int_S (x^2+z^2)\,dm(M)=B$$

$$I_{33}=\int_S (x^2+y^2)\,dm(M)=C$$

Moments d'inertie de S par rapport aux 3 axes.
Grandeurs positives
Unité : kg m²

$$I_{12}=I_{21}=-\int_S xy\,dm(M)=-F$$

$$I_{13}=I_{31}=-\int_S xz\,dm(M)=-E$$

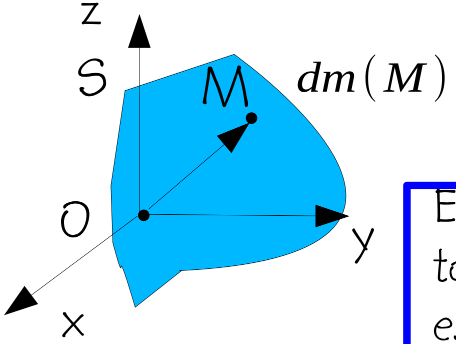
$$I_{23}=I_{32}=-\int_S yz\,dm(M)=-D$$

Produits d'inertie de S , qui peuvent être positifs ou négatifs.
Unité : kg m²

Exercice

Montrer que la trace de la matrice d'inertie est égale à deux fois le moment d'inertie du solide par rapport au point O.

Repère principal d'inertie



Repère pas référentiel

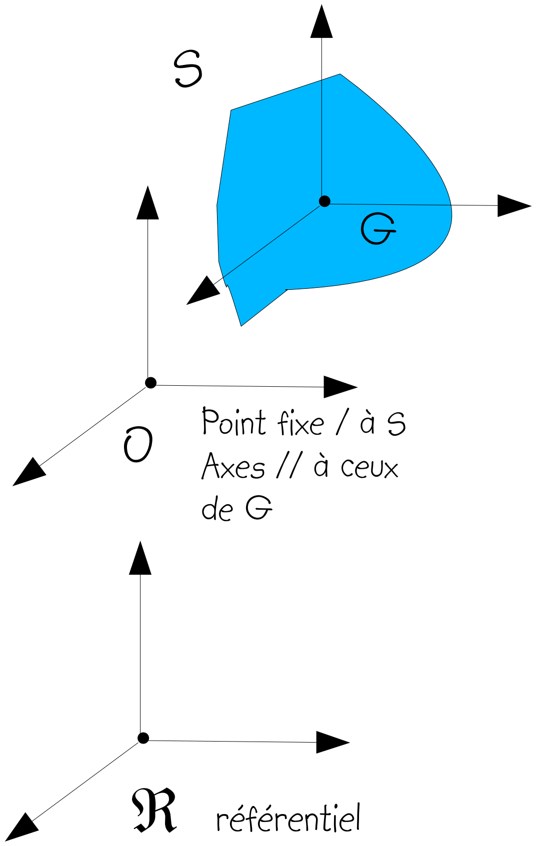
$$I=\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

En raison de son caractère symétrique et réel, la matrice d'inertie est toujours diagonalisable dans un repère convenable. Un repère de la sorte est appelé repère principal d'inertie au point O. Ses axes sont des axes principaux d'inertie et les moments ainsi obtenus sont les moments principaux d'inertie.

Si O = G, il s'agit alors d'un repère principal central d'inertie.

$$I'=\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Si S possède un axe de symétrie passant par 0, celui-ci est axe principal d'inertie.
Si S possède un plan de symétrie passant par 0, alors l'axe perpendiculaire à ce plan en O est un axe principal d'inertie.



Théorème du transport de Huygens (1629-1695)

Rappel , loi de déplacement du moment cinétique :

$$\vec{L}_{S/O}=\vec{L}_{S/G}+\overrightarrow{OG}\wedge m\vec{V}^{G}_{/\mathfrak{R}}=I_{S/G}\vec{\Omega}+\overrightarrow{OG}\wedge m\vec{V}^{G}_{/\mathfrak{R}}$$

Par ailleurs : $\vec{V}^{G}_{/\mathfrak{R}}=\vec{V}^{O}_{/\mathfrak{R}}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG}$

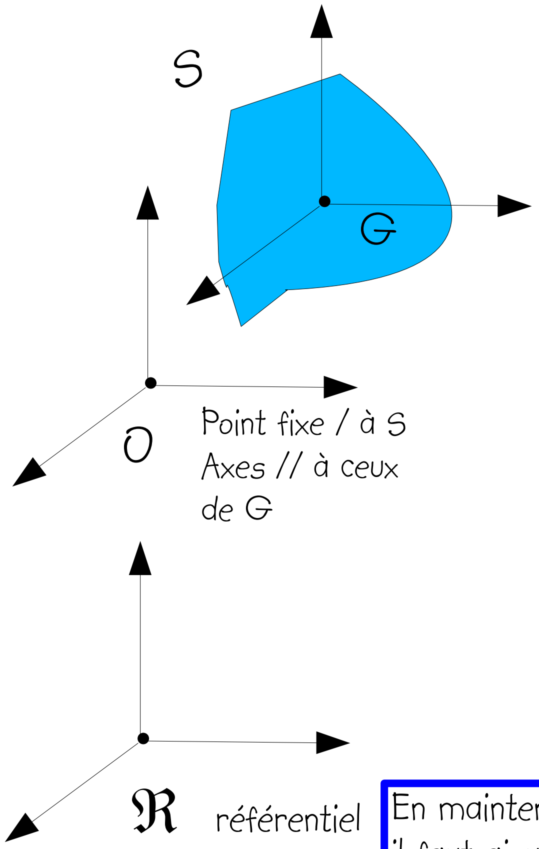
$$\vec{L}_{S/O}=I_{S/G}\vec{\Omega}+\overrightarrow{OG}\wedge m\vec{V}^{O}_{/\mathfrak{R}}+m\overrightarrow{OG}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG})$$

Mais aussi :

$$\vec{L}_{S/O}=I_{S/O}\vec{\Omega}+\overrightarrow{OG}\wedge m\vec{V}^{O}_{/\mathfrak{R}}$$

Donc : $I_{S/O}\vec{\Omega}=I_{S/G}\vec{\Omega}+m\overrightarrow{OG}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG})$

Théorème de Huygens, suite



$$I_{S/O}\vec{\Omega} = I_{S/G}\vec{\Omega} + m\overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG})$$

$$I_{S/O}\vec{\Omega} = I_{S/G}\vec{\Omega} + \underline{m\ \vec{\Omega}\ \ OG^2 - m\overrightarrow{OG}(\overrightarrow{OG}\cdot\vec{\Omega})}$$

Ne dépend que du vecteur vitesse de rotation et des coordonnées de G dans le repère de O.

exo : faire ce calcul

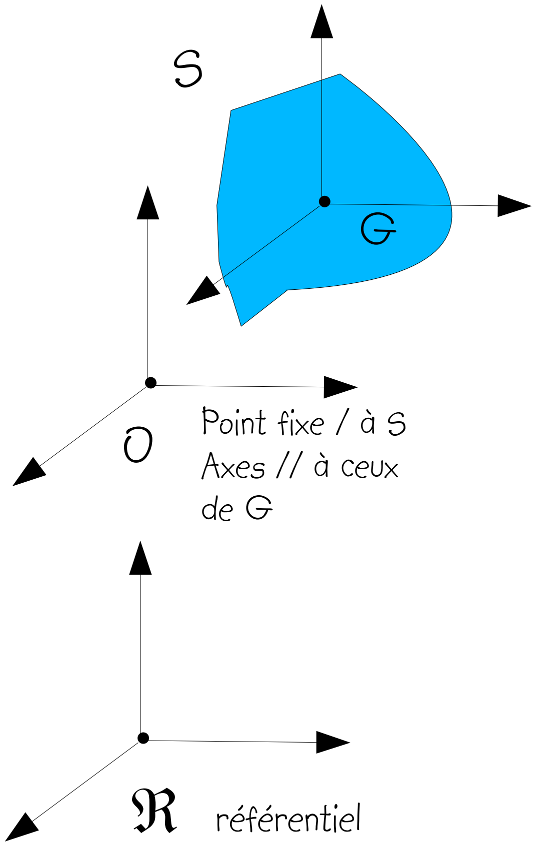
$$I_{S/O}\vec{\Omega} = \left(I_{S/G} + m\begin{pmatrix} y_G^2+z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2+z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2+y_G^2 \end{pmatrix}\right)\vec{\Omega}$$

Finalement :

$$\boxed{I_{S/O} = I_{S/G} + m\begin{pmatrix} y_G^2+z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2+z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2+y_G^2 \end{pmatrix}}$$

En maintenant les axes //, la matrice d'inertie en O est égale à la matrice d'inertie en G à laquelle il faut ajouter une matrice de transfert de G vers O.

Moment cinétique d'un solide, déroulé du calcul



On calcule la matrice d'inertie dans un repère principal central d'inertie, là où c'est le plus simple !

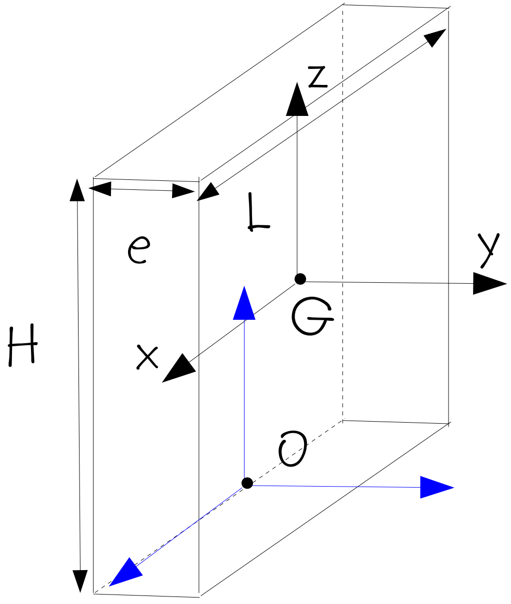
Les matrices d'inertie principales sont tabulées sur de nombreux sites sur internet pour les solides usuels homogènes.

On ajoute la matrice de transfert pour aboutir à la matrice d'inertie au point O voulu.

On applique : $\vec{L}_{S/O} = I_{S/O}\vec{\Omega} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{V}^{O}_{/\Re}$

Si O est fixe par rapport à $\Re$, on a un mouvement de rotation pure.

Exemple : retour sur la plaque qui bascule (voir cours d'introduction)



On calcule la matrice d'inertie dans le repère principal central (axes de symétrie du solide)

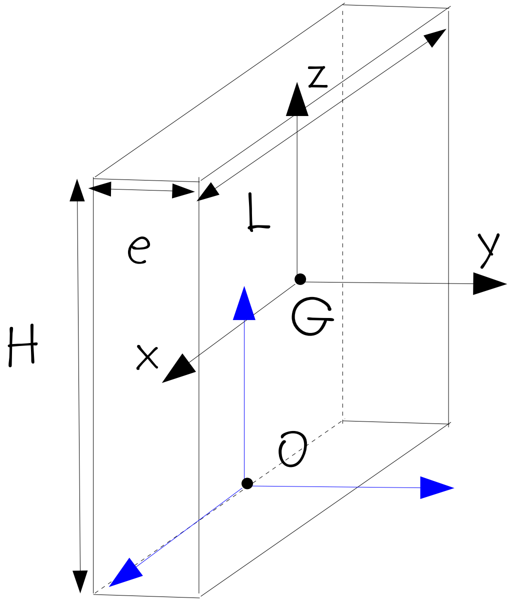
$$I_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \int_S (y^2 + z^2) \rho \, dx \, dy \, dz = \rho \left(\int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-e/2}^{e/2} y^2 dy \int_{-H/2}^{H/2} dz + \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-e/2}^{e/2} dy \int_{-H/2}^{H/2} z^2 dz \right)$$

$$A = \frac{\rho}{12}(L e^3 H + L e H^3) = \frac{m}{12}(e^2 + H^2)$$ car $$m = \rho e L H$$

$$B = \frac{m}{12}(L^2 + H^2) \qquad C = \frac{m}{12}(e^2 + L^2)$$

Exemple : retour sur la plaque qui bascule (voir cours d'introduction)

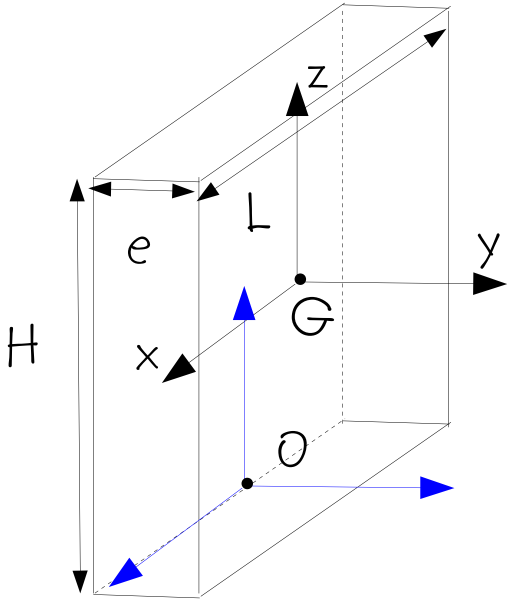


On ajoute la matrice de transfert en O

$X_G = 0 \quad , Y_G = e/2 \; , Z_G = H/2$

$$I_0 = \begin{pmatrix} A+m\left(\frac{e^2}{4}+\frac{H^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & B+m\left(\frac{H^2}{4}\right) & \frac{-meH}{4} \\ 0 & \frac{-meH}{4} & C+m\left(\frac{e^2}{4}\right) \end{pmatrix}$$

Exemple : retour sur la plaque qui bascule (voir cours d'introduction)



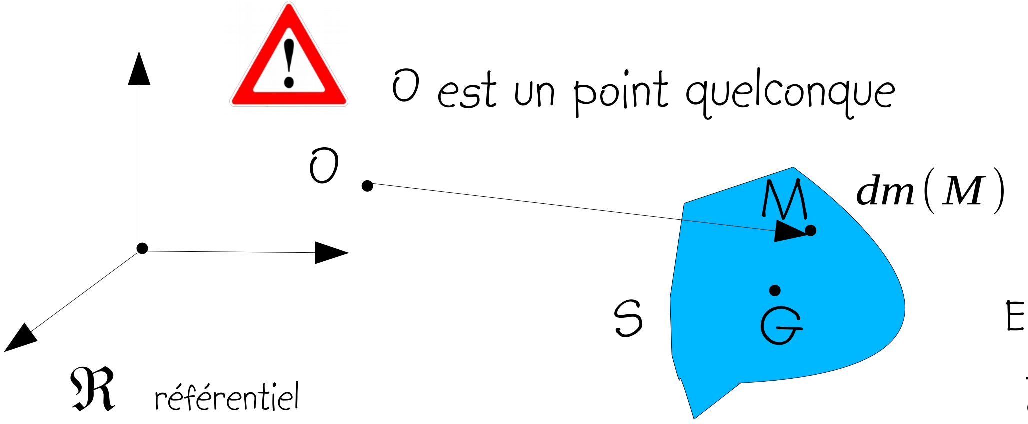
Quand la plaque bascule, O est fixe et le vecteur vitesse de rotation est selon (O,x) $\vec{\omega}=\omega\vec{i}$

$$\vec{L}_0=I_0\,\omega\,\vec{i}=\begin{pmatrix} A+m(\frac{e^2}{4}+\frac{H^2}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & B+m(\frac{H^2}{4}) & \frac{-meH}{4} \\ 0 & \frac{-meH}{4} & C+m(\frac{e^2}{4}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\\0\\0\end{pmatrix}$$

Le moment cinétique de la plaque qui bascule est donc : $\vec{L}_0=(A+m(\frac{e^2}{4}+\frac{H^2}{4}))\,\omega\,\vec{i}=\frac{m}{3}(e^2+H^2)\,\omega\,\vec{i}$

Moment et torseur dynamiques

$$\boxed{\int_S \vec{\Gamma}^M_{/\Re}\, dm(M) = \int_S \frac{d(\vec{V}^M_{/\Re})}{dt}\, dm(M) = \frac{d}{dt}\int_S \vec{V}^M_{/\Re}\, dm(M) = \frac{d}{dt}(\vec{P}_{S/\Re}) = m\frac{d(\vec{V}^G_{/\Re})}{dt} = m\vec{\Gamma}^G_{/\Re}}$$



O est un point quelconque

Définition du moment dynamique de S par rapport à O :

$$\boxed{\vec{\delta}_{S/O} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma}^M_{/\Re}\, dm(M)}$$

En un autre point A quelconque :

$$\vec{\delta}_{S/O} = \int_S (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}) \wedge \vec{\Gamma}^M_{/\Re}\, dm(M)$$

$$\vec{\delta}_{S/O} = \overrightarrow{OA} \wedge \int_S \vec{\Gamma}^M_{/\Re}\, dm(M) + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}^M_{/\Re}\, dm(M)$$

$$\vec{\delta}_{S/O} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{\Gamma}^G_{/\Re} + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}^M_{/\Re}\, dm(M)$$

$$\boxed{\vec{\delta}_{S/A} = \vec{\delta}_{S/O} + \overrightarrow{AO} \wedge m\vec{\Gamma}^G_{/\Re}}$$

Correspond à la loi de déplacement d'un moment de torseur de O en A. Le torseur en question est le torseur dynamique.

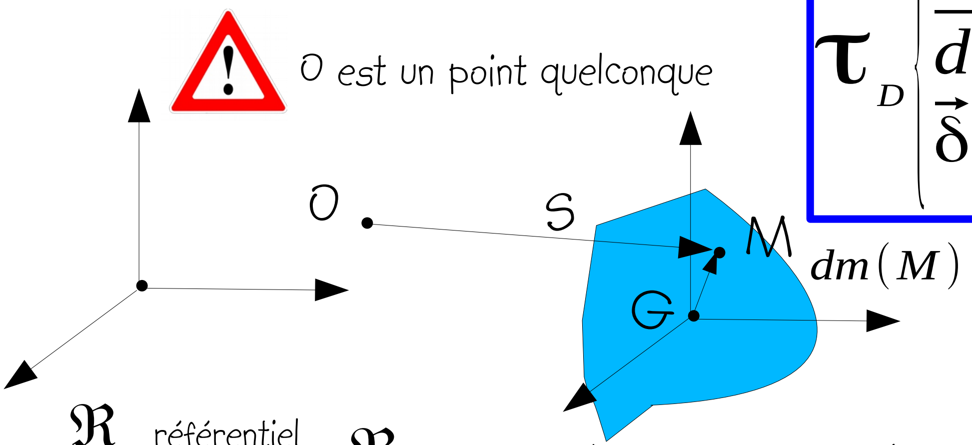
Torseur dynamique d'un solide indéformable

Torseur dynamique dans le référentiel $\Re$

Dérivée cinématique de la quantité de mouvement du solide

$$\tau_D \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\vec{P}_{S/\Re}\right) = m\,\vec{\Gamma}^{G}_{/\Re} = \int_S \vec{\Gamma}^{M}_{/\Re}\, dm(M) \\ \vec{\delta}_{S/O} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma}^{M}_{/\Re}\, dm(M) \end{array} \right\}_{O/\Re}$$

Moment dynamique du solide



$\Re$ référentiel $\quad \Re_G$ référentiel du centre de masse (ou de König)

$$\vec{\delta}_{S/A} = \vec{\delta}_{S/O} + \overrightarrow{AO} \wedge m\,\vec{\Gamma}^{G}_{/\Re}$$

$$\tau_D \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{\delta}_S = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\Gamma}^{M}_{/\Re_G}\, dm(M) \end{array} \right\}_{\Re_G}$$

Torseur dynamique dans le référentiel de son centre de masse

Exercices

Montrer que dans le référentiel du centre masse, le moment dynamique d'un solide ne dépend pas du point où on le calcule. (Le torseur dynamique dans le centre de masse est un couple).

Montrer que le moment dynamique d'un solide calculé par rapport à son centre de masse G dans le référentiel $\mathfrak{R}$, est égal au moment dynamique de ce solide dans son référentiel du centre de masse.

Les axes de $\mathfrak{R}_G$ restent parallèles à ceux de $\mathfrak{R}$, donc il ne sont soumis à aucune rotation.

$$\vec{\Gamma}^{M}_{/\mathfrak{R}} = \vec{\Gamma}^{M}_{/R_G} + \vec{\Gamma}^{G}_{/\mathfrak{R}}$$

$$\vec{\delta}_{S/R_G} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\Gamma}^{M}_{/\mathfrak{R}_G} dm(M) = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\Gamma}^{M}_{/\mathfrak{R}} - \vec{\Gamma}^{G}_{/\mathfrak{R}}) dm(M) = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\Gamma}^{M}_{/\mathfrak{R}} dm(M) = (\vec{\delta}_{S/G})_{/\mathfrak{R}}$$

$$\boxed{\vec{\delta}_{S/O} = \vec{\delta}_{S/G} + \overrightarrow{OG} \wedge m \vec{\Gamma}^{G}_{/\mathfrak{R}}}$$

Relation entre les moments dynamique et cinétique

Rappel : (ici O est un point quelconque pas nécessairement fixe / $\mathfrak{R}$)

$$\vec{L}_{S/O}=\int_S \overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}\,dm(M) \qquad \frac{d}{dt}(\vec{L}_{S/O})=\frac{d}{dt}\int_S \overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}\,dm(M)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_{S/O})=\int_S \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM})\wedge\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}\,dm(M)+\int_S \overrightarrow{OM}\wedge\frac{d}{dt}(\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}})\,dm(M)=\int_S \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM})\wedge\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}\,dm(M)+\vec{\delta}_{S/\mathfrak{R}}$$

Mais : $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM})=\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}-\vec{V}^O_{/\mathfrak{R}}$ car O peut se déplacer / $\mathfrak{R}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_{S/O})=\int_S (\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}-\vec{V}^O_{/\mathfrak{R}})\wedge\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}\,dm(M)+\vec{\delta}_{S/O}=\vec{\delta}_{S/O}-\int_S \vec{V}^O_{/\mathfrak{R}}\wedge\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}\,dm(M)=\vec{\delta}_{S/O}-m\vec{V}^O_{/\mathfrak{R}}\wedge\vec{V}^G_{/\mathfrak{R}}$$

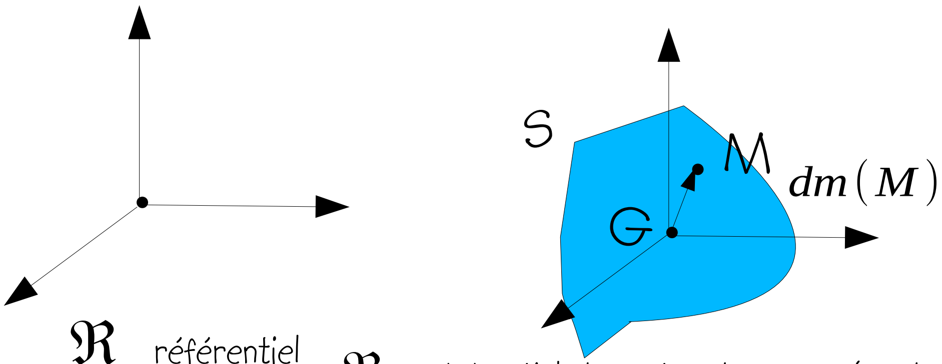
$$\boxed{\vec{\delta}_{S/O}=\frac{d}{dt}(\vec{L}_{S/O})+m\vec{V}^O_{/\mathfrak{R}}\wedge\vec{V}^G_{/\mathfrak{R}}}$$

Si O est quelconque

Si O=G ou O est fixe / $\mathfrak{R}$ ou $\vec{V}^O_{/\mathfrak{R}}=\alpha\vec{V}^G_{/\mathfrak{R}}$

$$\boxed{\vec{\delta}_{S/O}=\frac{d}{dt}(\vec{L}_{S/O})}$$

Énergie cinétique



$\Re$ référentiel

$\Re_G$ référentiel du centre de masse (ou de König)

Définition : $T_{S/\Re} = \frac{1}{2}\int_S (\vec{V}^M_{/\Re})^2\, dm(M)$

$$\vec{V}^M_{/\Re} = \vec{V}^M_{/\Re_G} + \vec{V}^G_{/\Re}$$

$$T_{S/\Re} = \frac{1}{2}\int_S (\vec{V}^M_{/\Re_G} + \vec{V}^G_{/\Re})^2\, dm(M)$$

$$T_{S/\Re} = \frac{1}{2}\int_S \left((\vec{V}^M_{/\Re_G})^2 + (\vec{V}^G_{/\Re})^2 + 2\,\vec{V}^M_{/\Re_G}\cdot\vec{V}^G_{/\Re}\right) dm(M)$$

$$= T_{S/\Re_G} + \frac{m}{2}(\vec{V}^G_{/\Re})^2 + \int_S \vec{V}^M_{/\Re_G}\cdot\vec{V}^G_{/\Re}\, dm(M)$$

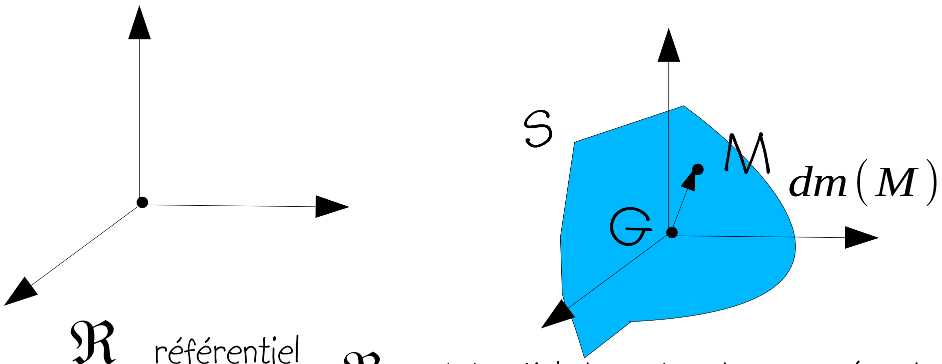
$$= T_{S/\Re_G} + \frac{m}{2}(\vec{V}^G_{/\Re})^2 + \vec{V}^G_{/\Re}\cdot\int_S \vec{V}^M_{/\Re_G}\, dm(M)$$

or : $\int_S \vec{V}^M_{/\Re_G}\, dm(M) = \vec{P}_{S/\Re_G} = \vec{0}$

$$\boxed{T_{S/\Re} = T_{S/\Re_G} + \frac{m}{2}(\vec{V}^G_{/\Re})^2}$$

Deuxième théorème de König

Énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse



$\mathfrak{R}$ référentiel

$\mathfrak{R}_G$ référentiel du centre de masse (ou de König)

$$T_{S/\mathfrak{R}_G} = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}^{M}_{/\mathfrak{R}_G}\right)^2 dm(M)$$

Or : $\vec{V}^{M}_{/\mathfrak{R}_G} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}$

$$T_{S/\mathfrak{R}_G} = \frac{1}{2}\int_S \vec{V}^{M}_{/\mathfrak{R}_G} \cdot \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right) dm(M)$$

$$= \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}^{M}_{/\mathfrak{R}_G}, \vec{\Omega}, \overrightarrow{GM}\right) dm(M)$$

Produit mixte ! se conserve par permutation circulaire

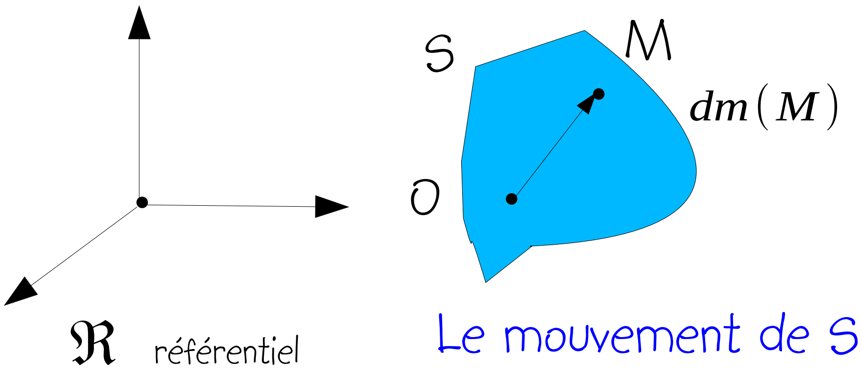
$$= \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{\Omega}, \overrightarrow{GM}, \vec{V}^{M}_{/\mathfrak{R}_G}\right) dm(M)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^{M}_{/\mathfrak{R}_G}\, dm(M)$$

$$\boxed{T_{S/\mathfrak{R}_G} = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \vec{L}_{S/G} = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot I(G)\vec{\Omega}}$$

$$\boxed{T_{S/\mathfrak{R}} = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot I(G)\vec{\Omega} + \frac{m}{2}\left(\vec{V}^{G}_{/\mathfrak{R}}\right)^2}$$

Énergie cinétique suite



Le mouvement de S a un point O invariant / $\mathfrak{R}$

$$\boxed{T_{S/\mathfrak{R}}=\frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot I(0)\vec{\Omega}}$$

$$T_{S/\mathfrak{R}}=\frac{1}{2}\int_S(\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}})^2\,dm(M)$$

Or : $\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}=\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$

$$T_{S/\mathfrak{R}}=\frac{1}{2}\int_S\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}\cdot(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM})\,dm(M)$$

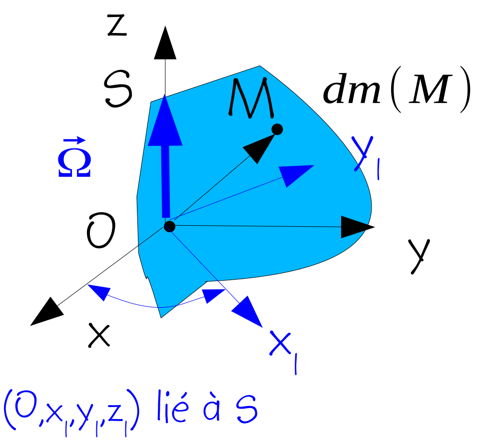
$$=\frac{1}{2}\int_S(\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}},\vec{\Omega},\overrightarrow{OM})\,dm(M)$$ Produit mixte !

$$=\frac{1}{2}\int_S(\vec{\Omega},\overrightarrow{OM},\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}})\,dm(M)$$

$$=\frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot\int_S\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}^M_{/\mathfrak{R}}\,dm(M)$$

$$\boxed{T_{S/\mathfrak{R}}=\frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot\vec{L}_{S/O}=\frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot I(O)\vec{\Omega}}$$

Énergie cinétique suite



Rotation autour d'un axe constant (o,z) == (o,z_1)

$$I(o)\vec{\Omega}=\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega}=\omega\vec{k}$$

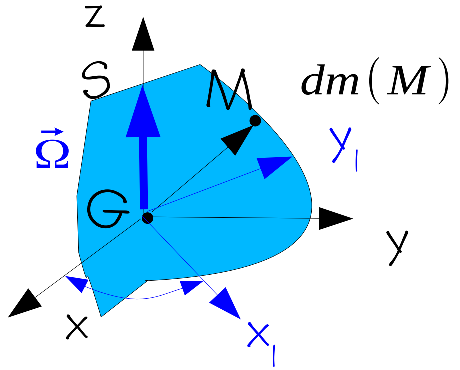
$$C=I_{33}=\int_S (x^2+y^2)\,dm(M)$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation

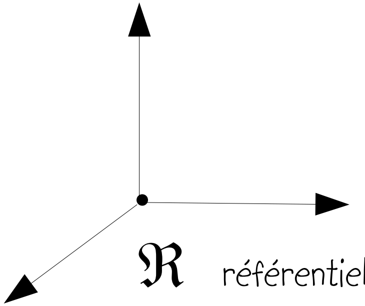
$$\boxed{T_{S/\mathfrak{R}}=\frac{1}{2}C\omega^2}$$

Énergie cinétique suite

(G, x_1, y_1, z_1) lié à S



$\Re_G$ référentiel du centre de masse (ou de König)



$\Re$ référentiel

Rotation autour d'un axe constant (G,z) == (G,z_1) dans $\Re_G$

$$I(G)\vec{\Omega}=\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

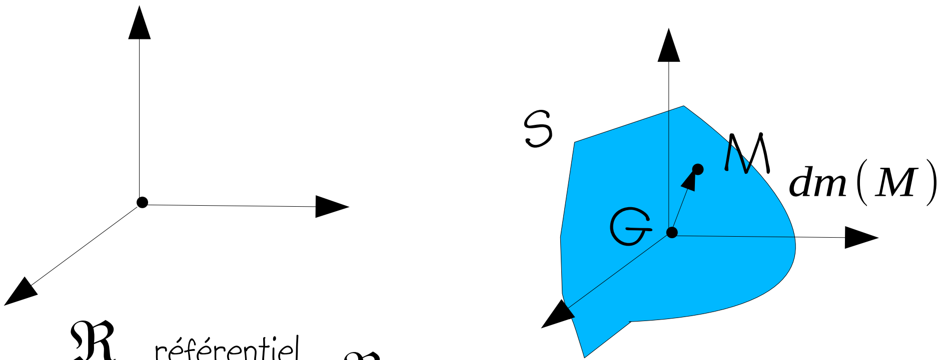
$$\vec{\Omega}=\omega\vec{k}$$

$$C=I_{33}=\int_S (x^2+y^2)\,dm(M)$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation

$$\boxed{T_{S/\Re}=\frac{1}{2}C\omega^2+\frac{m}{2}(\vec{V}^G_{/\Re})^2}$$

Énoncé torsoriel de l'énergie cinétique d'un solide rigide



$\Re$ référentiel

$\Re_G$ référentiel du centre de masse (ou de König)

Rappel : comoment (ou produit scalaire) de 2 torseurs

$$\tau_1 \otimes \tau_2 = \tau_1 \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{1/O} \end{Bmatrix}_O \otimes \tau_2 \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{2/O} \end{Bmatrix}_O = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_{2/O} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{1/O}$$

Le comoment ne dépend pas du point auquel on le calcule.

L'énergie cinétique d'un solide rigide est la moitié du comoment de ses torseurs cinétique et cinématique.

$$\tau_C \begin{Bmatrix} m\vec{V}^G_{/\Re} \\ \vec{L}_{S/G} \end{Bmatrix}_{G/\Re} \qquad \tau_V \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}^G_{/\Re} \end{Bmatrix}_{G/\Re}$$

$$\boxed{T_{S/\Re} = \frac{1}{2} \tau_{C/\Re} \otimes \tau_{V/\Re}} = \frac{m}{2} (\vec{V}^G_{/\Re})^2 + \frac{1}{2} \vec{L}_{S/G} \cdot \vec{\Omega} = \frac{m}{2} (\vec{V}^G_{/\Re})^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot I(G) \vec{\Omega}$$

Exercice :

Montrer que l'énergie cinétique d'un solide rigide ne dépend pas du point O de réduction des éléments des torseurs cinétique et cinématique.

Pour en savoir plus :

-Mécanique générale : Christian Gruber, Presses polytechniques romandes

-Mécanique, J.Ph. Pérez, Masson

-Mécanique , J.-L. Teyssier, J.-P. Ducourtieux, J.-P. Moliton, Armand Collin

-Rappels de mécanique du point matériel :

- http://lpsc.in2p3.fr/images/collot/MomentCinetique.pdf