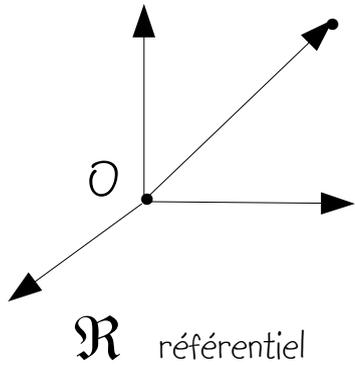


Cinématique des solides indéformables :

Étude du mouvement des solides
sans en considérer la cause

Les grandeurs cinématiques : RAPPEL !!



$M(t)$

Position de M par rapport à \mathcal{R}

$$\overrightarrow{OM}_{\mathcal{R}}$$

Vitesse de M par rapport à \mathcal{R}

$$\vec{V}_{/\mathcal{R}}^M = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM}_{\mathcal{R}})$$

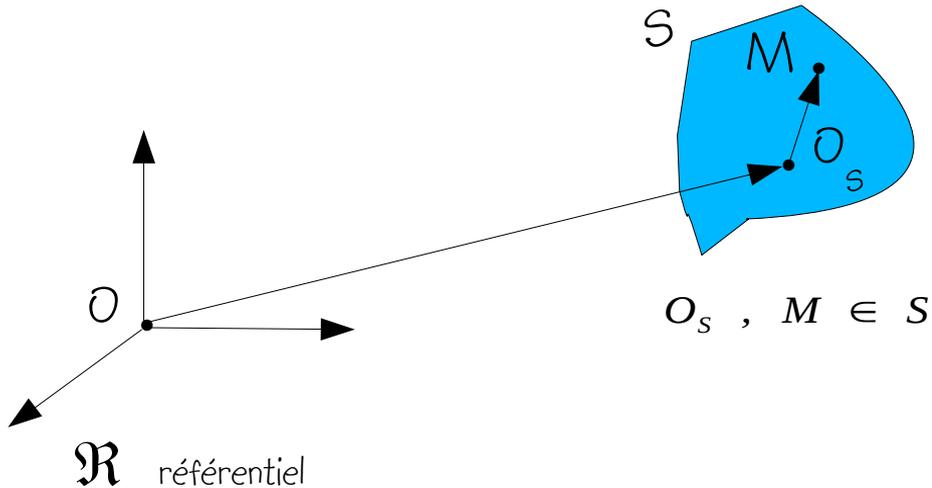
Accélération de M par rapport à \mathcal{R}

$$\vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^M = \frac{d}{dt} (\vec{V}_{/\mathcal{R}}^M)$$

Attention, ici la dérivée (variation) cinématique (d/dt) est jugée par rapport à \mathcal{R} .

Ces trois grandeurs cinématiques suffisent à décrire le mouvement, mais évidemment l'accélération peut aussi varier avec le temps.

Repérage dans l'espace en fonction du temps d'un solide rigide

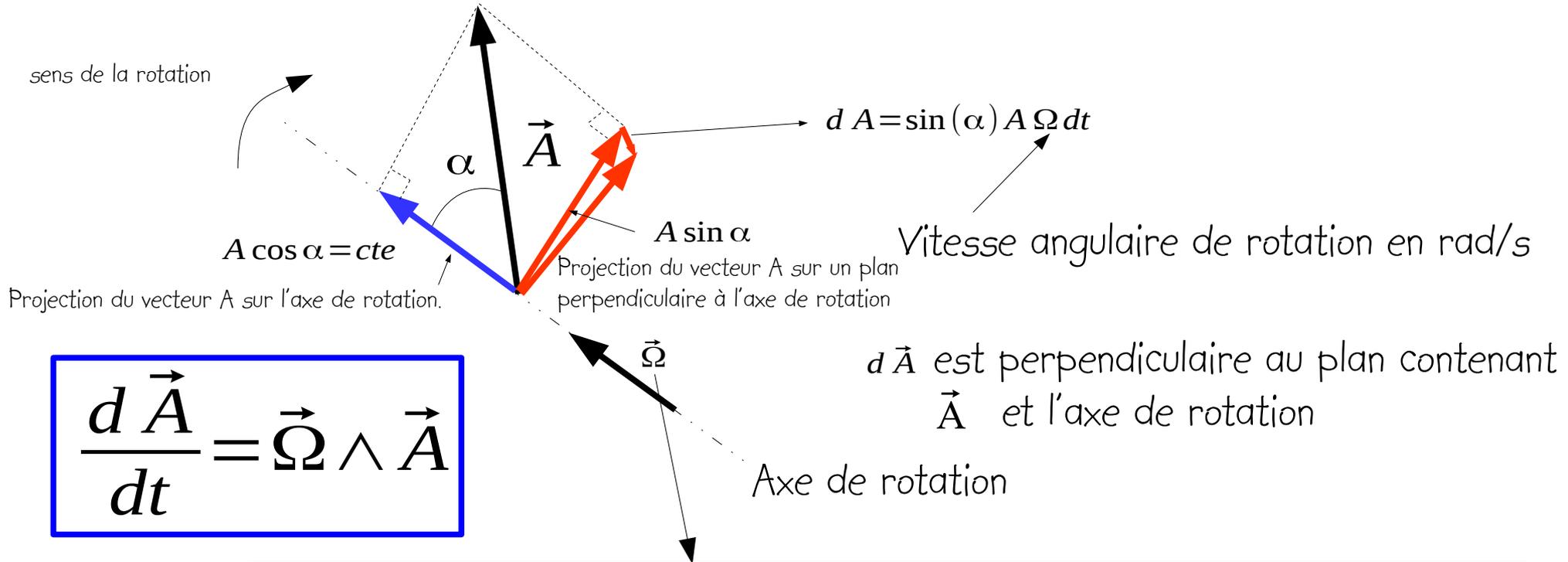


$$\|\vec{O_S M}\| = O_S M = cte$$

Chaque bipoint de S ne peut que changer de direction, donc tourner !
À un instant t donné, tous les points de S tournent de la même manière.

La position et l'évolution d'un solide rigide S peuvent être étudiées à partir de la donnée à chaque instant des 3 coordonnées de l'un des points du solide et de trois angles définis à partir de ce point. Ceci correspond aux 6 degrés de libertés d'un solide rigide : 3 de translations et 3 de rotations. Ces six nombres évoluent en fonction du temps.

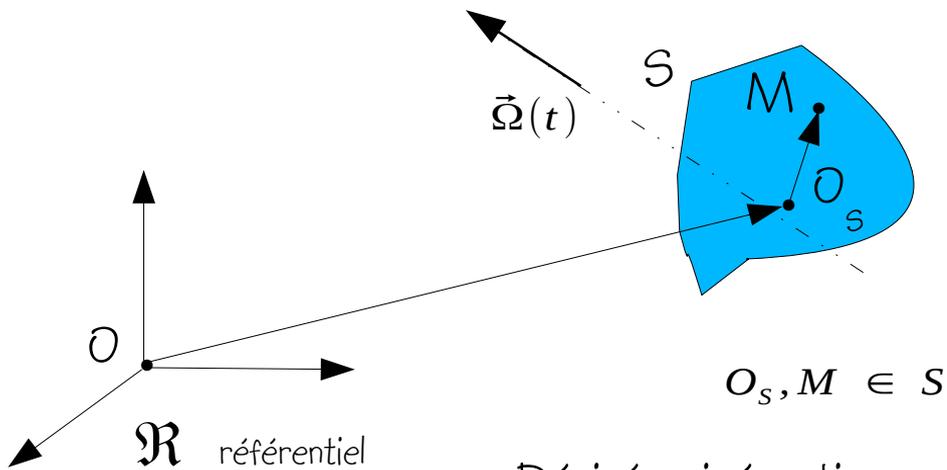
Dérivée d'un vecteur tournant de norme constante



$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$$

Vecteur vitesse de rotation, de même direction que l'axe de rotation et de module = vitesse angulaire de rotation, sens donné par le pas de vis à droite

Vitesse des points d'un solide rigide S , torseur cinématique de S



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_S} + \overrightarrow{O_S M}$$

$$\vec{V}_{/\mathcal{R}}^M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OO_S} + \overrightarrow{O_S M})$$

$$= \vec{V}_{/\mathcal{R}}^{O_S} + \frac{d(\overrightarrow{O_S M})}{dt}$$

Dérivée cinématique par rapport à \mathcal{R}

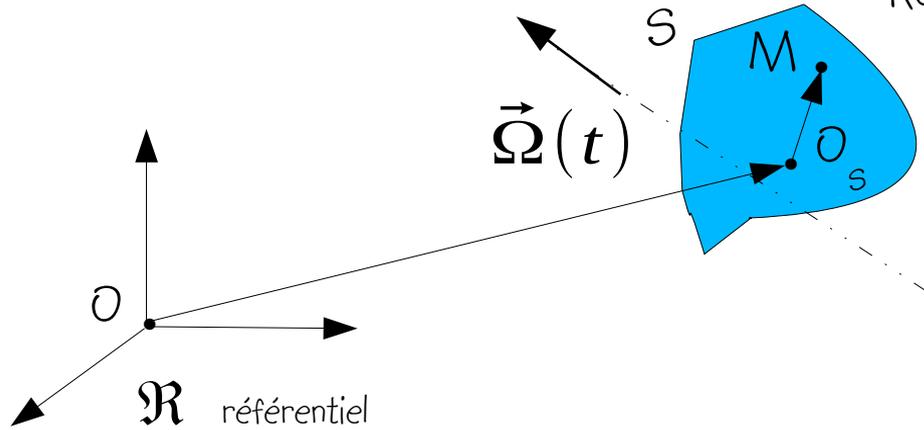
$$= \vec{V}_{/\mathcal{R}}^{O_S} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

$$\tau_v \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_{/\mathcal{R}}^M \end{array} \right\}_{M/\mathcal{R}}$$

$$\vec{V}_{/\mathcal{R}}^M = \vec{V}_{/\mathcal{R}}^{O_S} + \overrightarrow{M O_S} \wedge \vec{\Omega} = \vec{V}_{/\mathcal{R}}^{O_S} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

Torseur cinématique de S par rapport à \mathcal{R}

Accélération des points d'un solide rigide S



Rappel : $\frac{d}{dt}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{d}{dt}(\vec{A}) \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d}{dt}(\vec{B}) = \dot{\vec{A}} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \dot{\vec{B}}$

$$\vec{V}_{/\mathcal{R}}^M = \vec{V}_{/\mathcal{R}}^{O_S} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

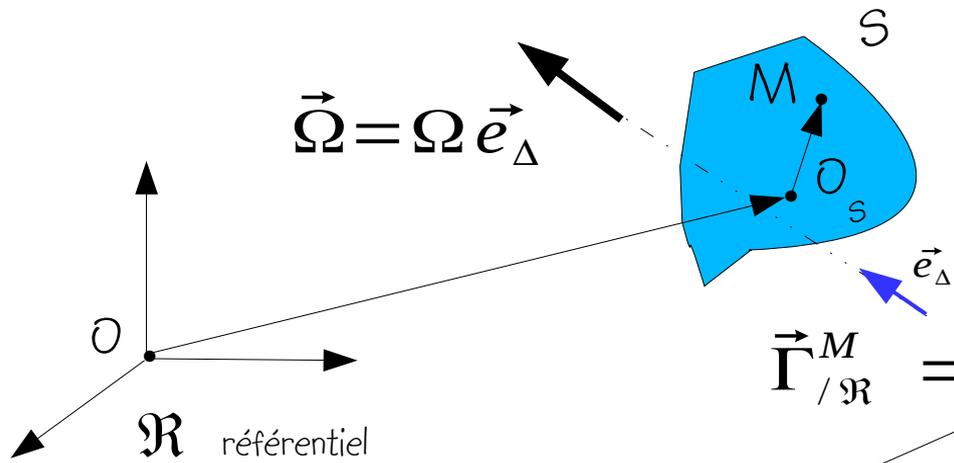
$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^M &= \frac{d}{dt}(\vec{V}_{/\mathcal{R}}^M) = \vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^{O_S} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O_S M} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\dot{O_S M}} \\ &= \vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^{O_S} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O_S M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_S M}) \end{aligned}$$

Dérivée cinématique par rapport à \mathcal{R}

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^M = \vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^{O_S} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O_S M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_S M})}$$

Théorème de Rivals

Comprendre l'accélération



variation de la vitesse angulaire

$$\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\Omega} \vec{e}_\Delta + \Omega \frac{d}{dt} (\vec{e}_\Delta)$$

Rotation de l'axe de rotation

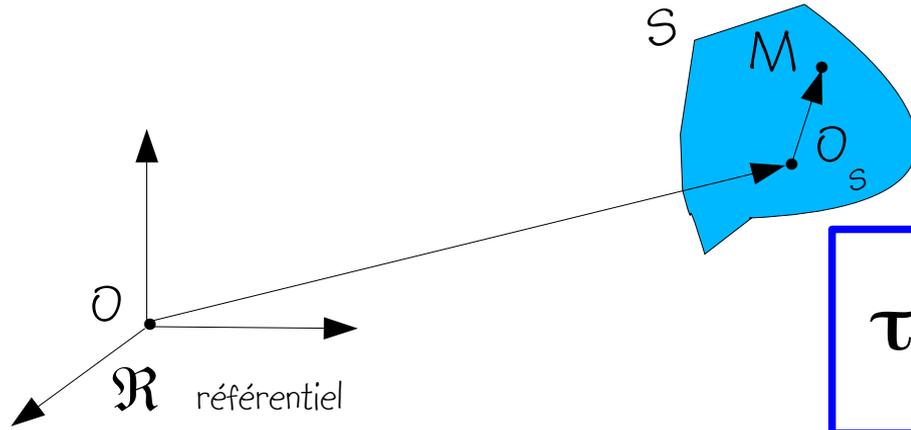
$$\vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^M = \vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^{O_s} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O_s M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_s M})$$

accélération de O_s par rapport à \mathcal{R}

accélération centripète dirigée vers l'axe de rotation

Cas particulier : mouvement de translation d'un solide rigide

$$\overline{O_s \vec{M}} \text{ ne dépend pas de } t \quad \forall M \in S \Rightarrow \vec{\Omega} = \vec{0}$$



$$\vec{V}_{/R}^M = \vec{V}_{/R}^{O_s}$$

$$\vec{\Gamma}_{/R}^M = \vec{\Gamma}_{/R}^{O_s}$$

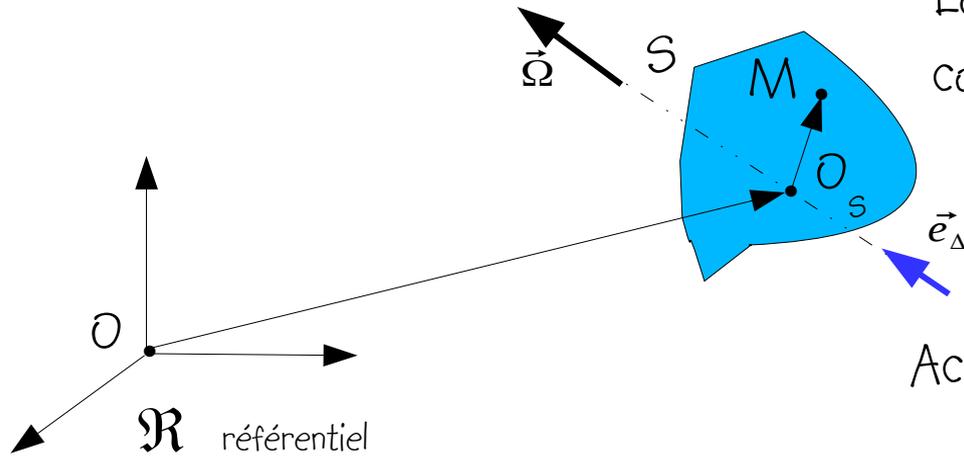
$$\tau_v \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}_{/R}^M \end{array} \right\}_{M/R}$$

Torseur cinématique de S par rapport à \mathcal{R} (c'est un couple)

S présente une vitesse et une accélération homogènes (les mêmes en tout point de S).

La translation est uniforme si l'accélération est nulle.

Cas particulier : mouvement en rotation d'un solide rigide



Les points de S situés sur l'axe de rotation restent constants avec le temps par rapport à \mathcal{R} .

Si O_S est situé sur l'axe de rotation :

$$\vec{V}_{/\mathcal{R}}^M = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

Accélération et vitesse orthoradiales

Si la rotation est uniforme :

$$\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$$

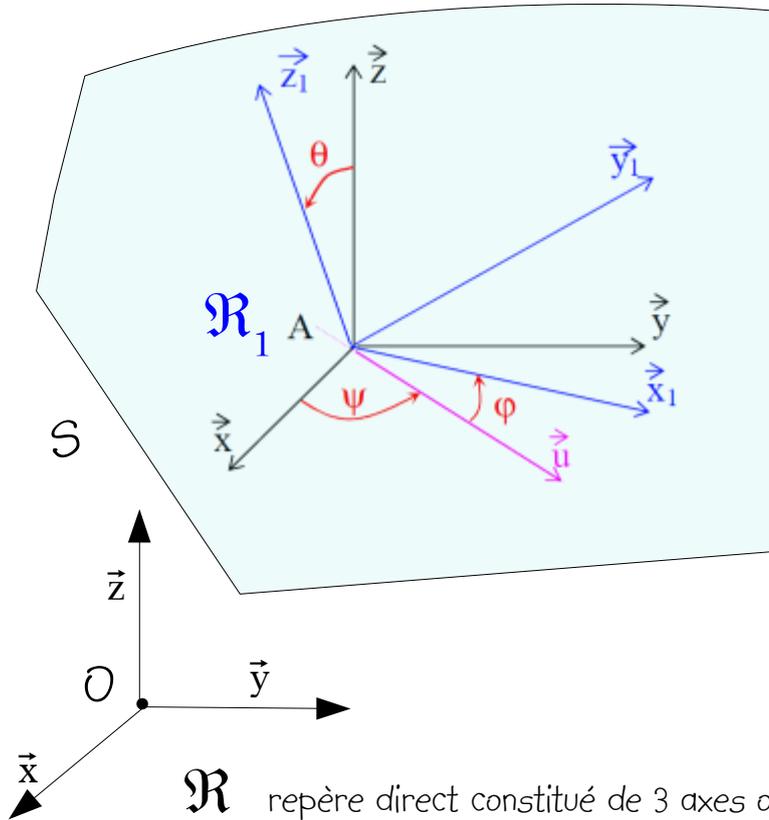
$$\vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^M = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_S M})$$

$$\vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^M = \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O_S M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_S M})$$

$$\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\Omega} \vec{e}_\Delta$$

accélération centripète dirigée vers l'axe de rotation

Angles d'Euler



Le repère direct $\mathcal{R}_1 (A, x_1, y_1, z_1)$ est lié au solide S et donc se déplace avec lui.

Le repère direct (A, x, y, z) a son origine liée à S mais ses axes restent parallèles aux axes de \mathcal{R} .

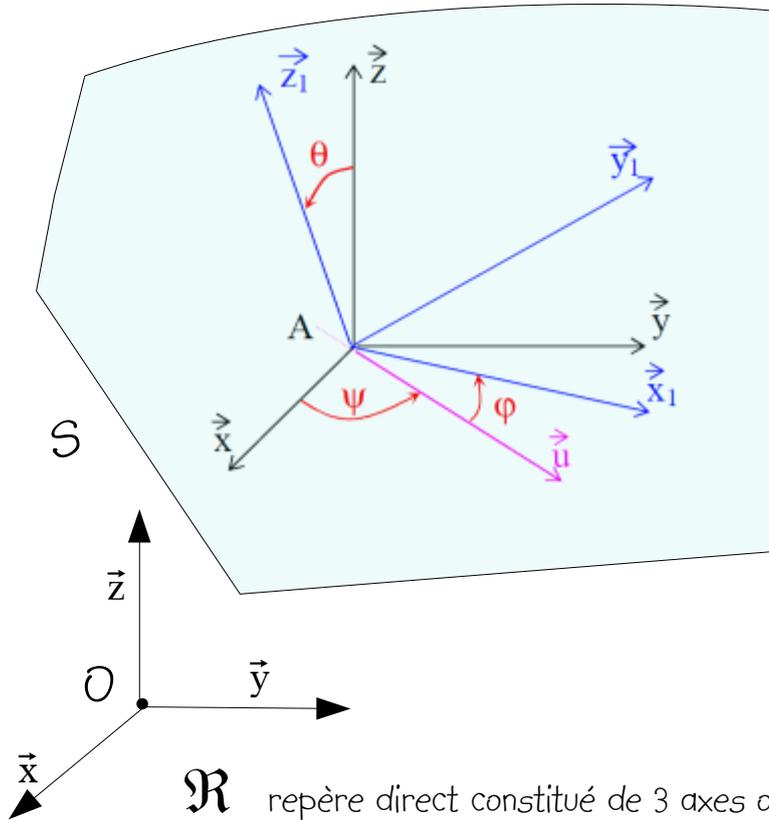
(A, u) est la droite des nœuds, intersection des plans (x, A, y) avec (x_1, A, y_1)

$$\psi = \widehat{(\vec{Ax}, \vec{Au})} \quad \text{angle de précession autour de } (A, z)$$

$$\theta = \widehat{(\vec{Az}, \vec{Az}_1)} \quad \text{angle de nutation autour de la droite des nœuds}$$

$$\varphi = \widehat{(\vec{Au}, \vec{Ax}_1)} \quad \text{angle de rotation propre autour de } (A, z_1)$$

Angles d'Euler



Le repérage du solide se fait alors par la donnée à tout instant t des coordonnées de A (A_x, A_y, A_z) par rapport à \mathcal{R} et des trois angles d'Euler.

$$\psi = \widehat{(\vec{Ax}, \vec{Au})} \quad \text{angle de précession autour de } (A,z)$$

$$\theta = \widehat{(\vec{Az}, \vec{Az}_1)} \quad \text{angle de nutation autour de la droite des nœuds}$$

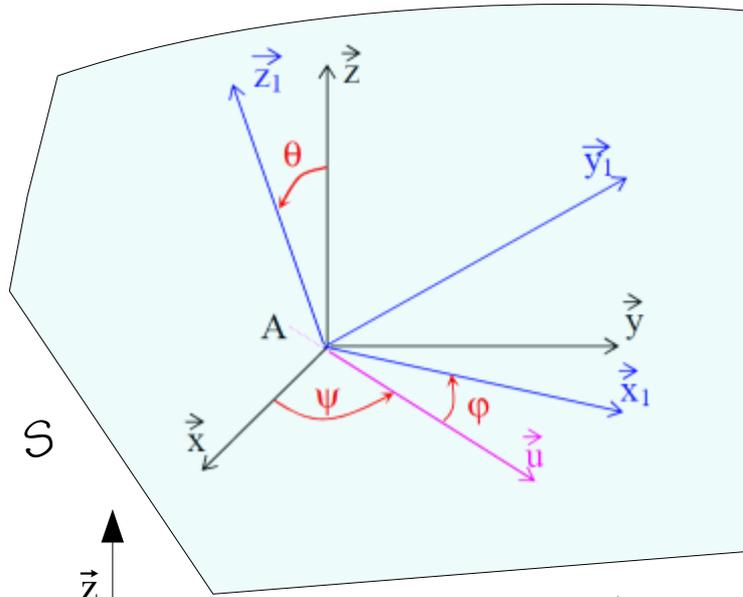
$$\phi = \widehat{(\vec{Au}, \vec{Ax}_1)} \quad \text{angle de rotation propre autour de } (A,z_1)$$

Exercice : Montrer que

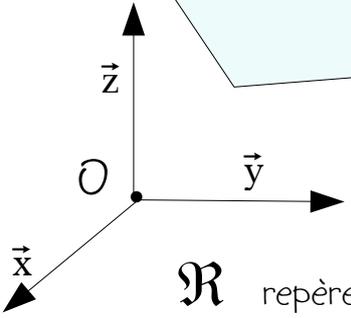
$$\vec{\Omega}^{\mathcal{R}1/\mathcal{R}} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \\ \dot{\phi} \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{xyz}$$

ici : $\phi = \phi$

Angles d'Euler



Exercice :
 Montrer que les coordonnées d'un point du solide dans \mathcal{R} sont telles que :
 (ici $\phi = \phi$)

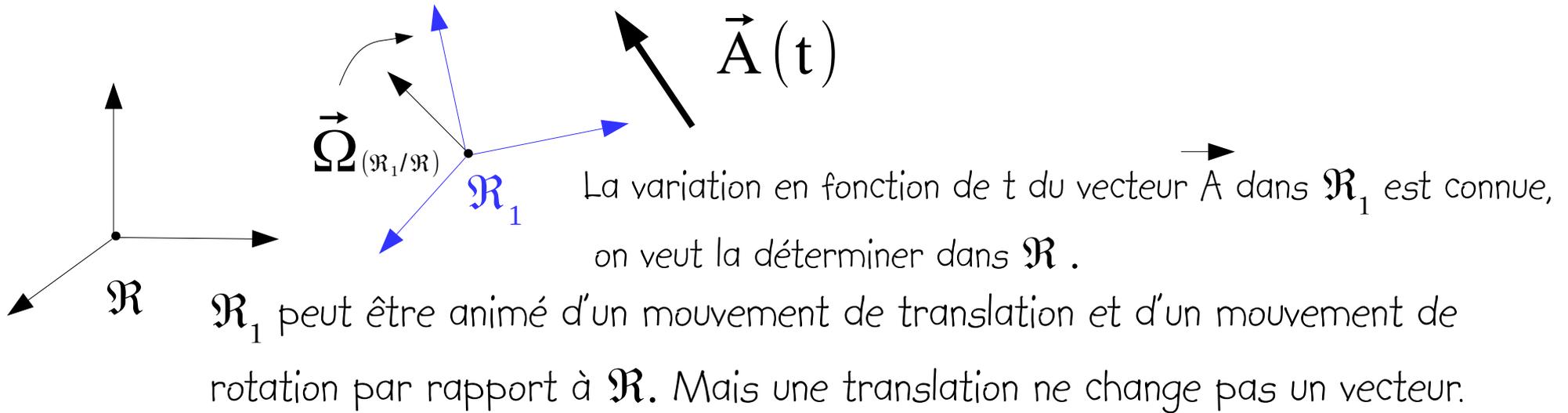


\mathcal{R} repère direct constitué de 3 axes orthogonaux

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \psi \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi - \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \psi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Changement de référentiel

Formule de Bour (1832-1866), loi de composition des dérivées cinématiques d'un vecteur :

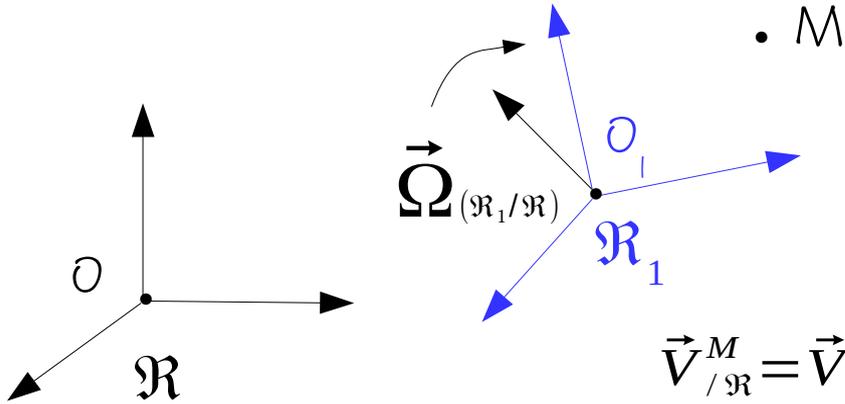


$$\frac{d}{dt} (\vec{A})_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} (\vec{A})_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \vec{A}$$

vecteur de rotation de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R}

Changement de référentiel :

Loi de composition des vitesses :



$$\vec{V}_{/R}^M = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM})_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OO_1})_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt} (\overrightarrow{O_1M})_{\mathcal{R}} = \vec{V}_{/R}^{O_1} + \frac{d}{dt} (\overrightarrow{O_1M})_{\mathcal{R}}$$

En utilisant la formule de Bour

$$\vec{V}_{/R}^M = \vec{V}_{/R}^{O_1} + \frac{d}{dt} (\overrightarrow{O_1M})_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/R)} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{V}_{/R_1}^M + \vec{V}_{/R}^{O_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/R)} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}_{/R}^M = \vec{V}_{/R_1}^M + \vec{V}_{/R}^{O_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/R)} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

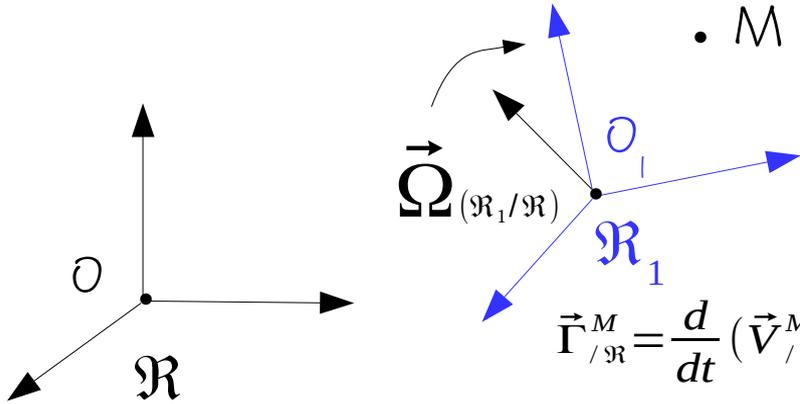
Si \mathcal{R}_1 est lié à un solide, on retrouve la loi de distribution des vitesses d'un solide.

Vitesse d'entraînement au point M

Ici M doit être compris comme le point lié à \mathcal{R}_1 coïncidant à t avec le point géométrique M

Changement de référentiel :

Loi de composition des accélérations :



$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{/R}^M &= \frac{d}{dt} (\vec{V}_{/R}^M)_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} (\vec{V}_{/R_1}^M + \vec{V}_{/R}^{O_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O_1M})_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{V}_{/R_1}^M)_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt} (\vec{V}_{/R}^{O_1})_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O_1M})_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Bour :

$$\vec{\Gamma}_{/R}^M = \frac{d}{dt} (\vec{V}_{/R_1}^M)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{/R_1}^M + \vec{\Gamma}_{/R}^{O_1} + \dot{\vec{\Omega}}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \frac{d}{dt} (\overrightarrow{O_1M})_{\mathcal{R}}$$

$$= \vec{\Gamma}_{/R_1}^M + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{/R_1}^M + \vec{\Gamma}_{/R}^{O_1} + \dot{\vec{\Omega}}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \frac{d}{dt} (\overrightarrow{O_1M})_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge (\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

$$\vec{\Gamma}_{/R}^M = \vec{\Gamma}_{/R_1}^M + \vec{\Gamma}_{/R}^{O_1} + \dot{\vec{\Omega}}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge (\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O_1M}) + 2\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{/R_1}^M$$

Si \mathcal{R}_1 est lié à un solide, on retrouve la loi de distribution des accélérations d'un solide.

Accélération de Coriolis (1792-1843)
 Accélération d'entraînement au point M

Ici M doit être compris comme le point lié à \mathcal{R}_1 coïncidant à t avec le point géométrique M

Changement de référentiel :

Loi de composition des torseurs cinématiques :

$$\tau_v \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \\ \vec{V}_{/ \mathcal{R}}^M \end{array} \right\}_{M/\mathcal{R}} = \tau_v \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_1} \\ \vec{V}_{/ \mathcal{R}_1}^M \end{array} \right\}_{M/\mathcal{R}_1} + \tau_v \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \\ \vec{V}_{\text{entraînement}}^M \end{array} \right\}_{M/\mathcal{R}}$$

$$\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}$$

Exemple : drone chutant verticalement en vrille

Changement de référentiel de \mathcal{R} à \mathcal{R}_1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{O_s} \end{pmatrix}$$

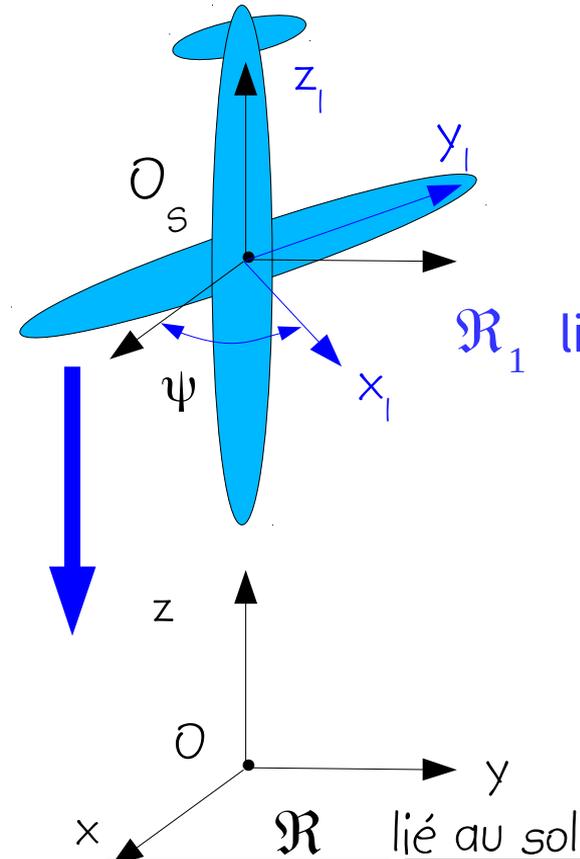
On considère que :

$$\ddot{\psi} = b e^{-\lambda t}$$

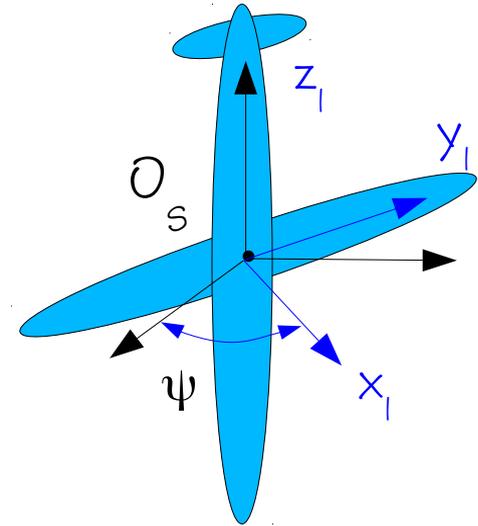
accélération angulaire

$$\ddot{z}_{O_s} = -a e^{-\lambda t}$$

accélération verticale



Exemple : drone chutant verticalement en vrille

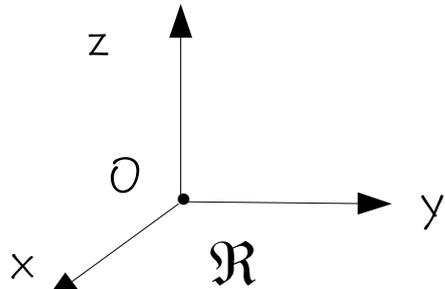


La vitesse angulaire de rotation est :

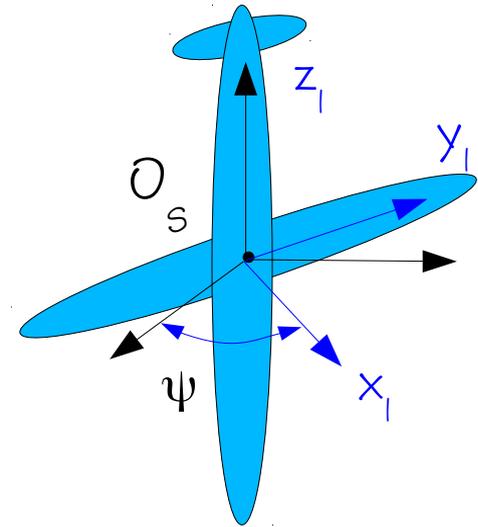
$$\dot{\psi} = \omega(t) = \frac{b}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) + \omega_0 \quad \text{À } t=0, \quad \omega(0) = \omega_0$$

Si $\psi(0) = 0$, l'équation horaire de la précession est :

$$\psi(t) = \frac{b}{\lambda^2}(e^{-\lambda t} - 1) + \left(\omega_0 + \frac{b}{\lambda}\right)t$$



Exemple : drone chutant verticalement en vrille

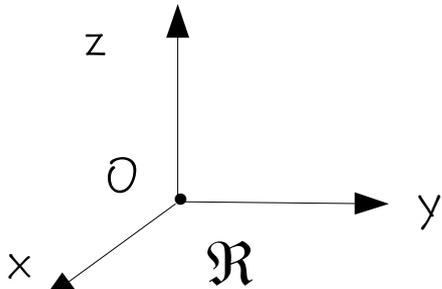


La vitesse verticale de O_s est :

$$\dot{z}_{O_s}(t) = \frac{a}{\lambda} (e^{-\lambda t} - 1) - v_0 \quad \text{À } t=0, \quad \dot{z}_{O_s}(0) = -v_0$$

Si $z_{O_s}(0) = z_0$, l'équation horaire de la hauteur est :

$$z_{O_s}(t) = \frac{a}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t}) - \left(v_0 + \frac{a}{\lambda}\right) t + z_0$$



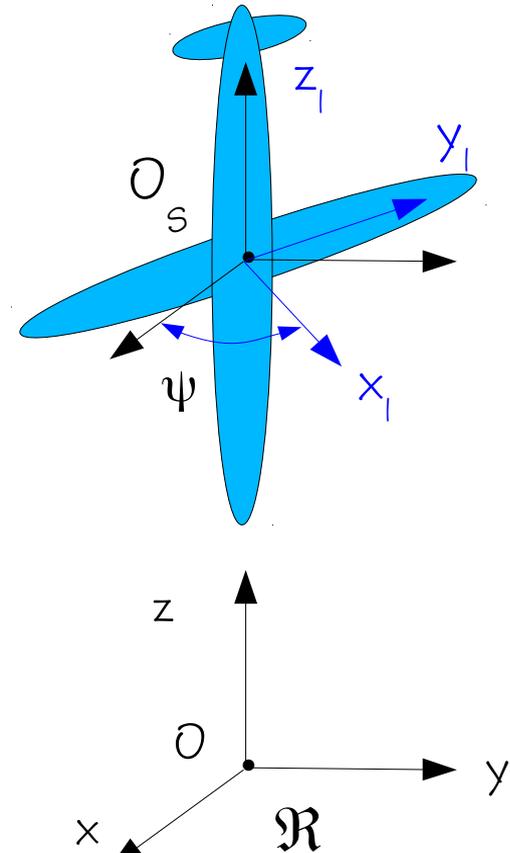
Exemple : drone chutant verticalement en vrille

Les coordonnées dans \mathcal{R} d'un point du drone sont alors :

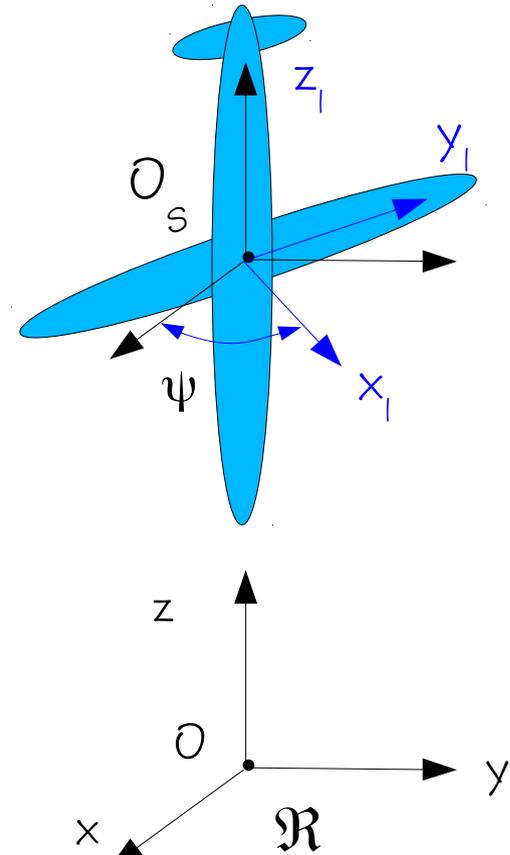
$$\vec{OM}_{/\mathcal{R}} = \left. \begin{array}{l} x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi \\ x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi \\ z_1 + \frac{a}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t}) - (v_0 + \frac{a}{\lambda}) t + z_0 \end{array} \right\}_{xyz}$$

avec :

$$\psi(t) = \frac{b}{\lambda^2} (e^{-\lambda t} - 1) + (\omega_0 + \frac{b}{\lambda}) t$$



Exemple : drone chutant verticalement en vrille



Torseur cinématique $\tau_v \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_{/R}^M \end{array} \right\}_{M/R}$

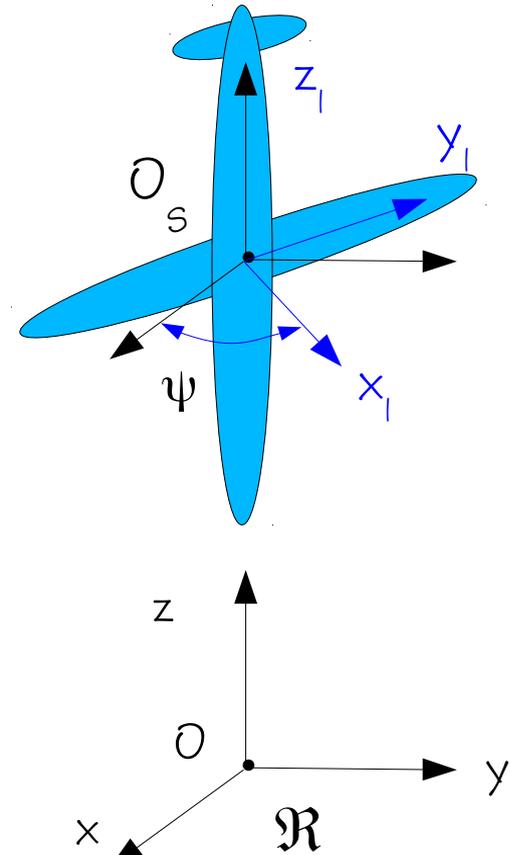
$$\vec{V}_{/R}^M = \vec{V}_{/R}^{O_S} + \overrightarrow{O_S M} \wedge \vec{\Omega} = \vec{V}_{/R}^{O_S} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{b}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) + \omega_0 \right) \vec{k}$$

$$\vec{V}_{/R}^{O_S} = \left(\frac{a}{\lambda} (e^{-\lambda t} - 1) - v_0 \right) \vec{k}$$

$$\overrightarrow{O_S M} = \begin{Bmatrix} x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi \\ x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi \\ z_1 \end{Bmatrix}_{xyz}$$

Exemple : drone chutant verticalement en vrille



$$\vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^M = \vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^{O_S} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O_S M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_S M})$$

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{b}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) + \omega_0 \right) \vec{k} \qquad \dot{\vec{\Omega}} = b e^{-\lambda t} \vec{k}$$

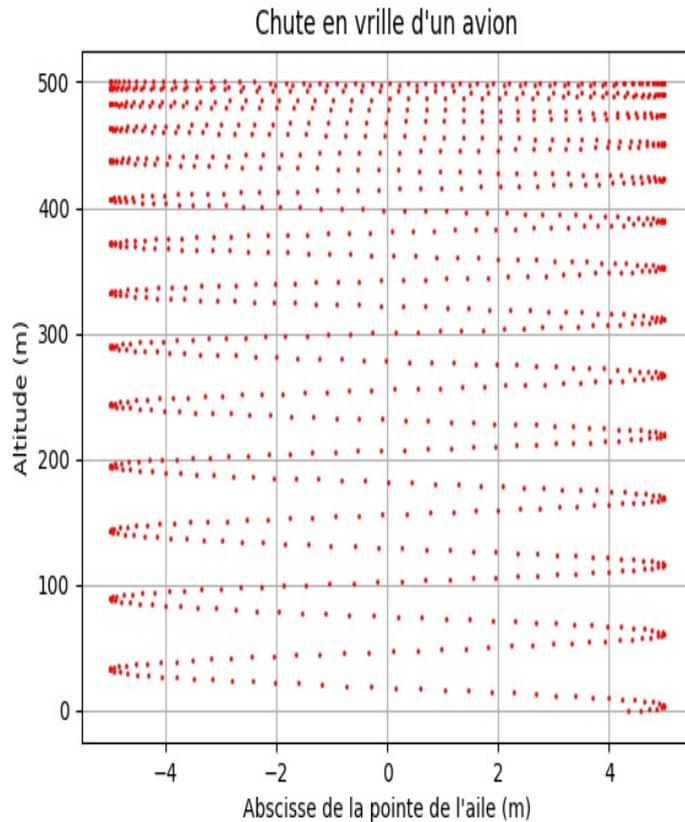
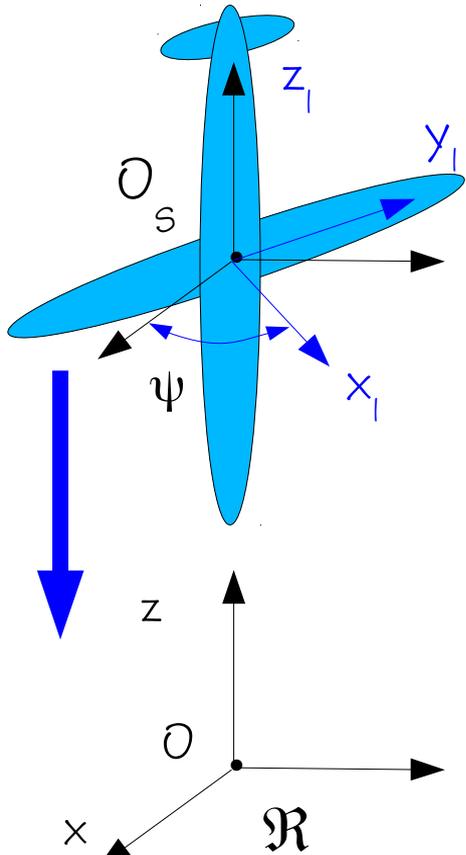
$$\vec{\Gamma}_{/\mathcal{R}}^{O_S} = -a e^{-\lambda t} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{O_S M} = \begin{cases} x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi \\ x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi \\ z_1 \end{cases} \Bigg|_{xyz}$$

Exercice :

Trouver les coordonnées du vecteur accélération en fonction de x_1 , y_1 , z_1 et de t , soit par la double dérivée cinématique du vecteur position soit en utilisant la formule ci-dessus. Faites les deux méthodes.

Exemple : drone chutant verticalement en vrille



$$z_0 = 500 \text{ m}$$

$$V_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$$

$$a = 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

$$b = \pi/10 \text{ rad s}^{-2}$$

$$\omega_0 = 2 \pi \text{ rad s}^{-1}$$

$$\lambda = 0,05 \text{ s}^{-1}$$

Temps de chute = 11 s

Vitesse max = 300 km h⁻¹

Exercice : reproduire cette figure sur ordinateur.

```

1 # Chute d'un avion - Johann Collot
2 # 19/03/2021
3 import matplotlib
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import numpy as np
6 import math as m
7
8 # Data for plotting
9
10 a= 9.81 # m s-2
11 b=2.*m.pi/20. # accélération angulaire initiale
12 Lambda= 0.05 # s-1
13 z0 = 500. # altitude initiale
14 v0 = 0. # vitesse initiale
15 omega0 = 2. * m.pi # vitesse angulaire initiale
16
17 z=z0 # altitude
18 L=5. # envergure
19 deltat = 0.01 # incrément du temps
20
21 t=0. # temps initial
22
23 az=[] # tableau des temps
24 axp=[] # tableau de la position de l'aile
25
26 while z>0. :
27     psi = b/Lambda/Lambda * (m.exp(-t*Lambda) - 1.) + (omega0 + b/Lambda)*t
28     z = a /Lambda/Lambda*(1.-m.exp(-t*Lambda))-(v0+a/Lambda)*t+z0
29     x= -L * m.cos(psi)
30     t=t+deltat
31     az.append(z) ; axp.append(x)
32
33 vmax = a/Lambda*(m.exp(-t*Lambda)-1.)-v0 ; omegamax = b/Lambda*(1-m.exp(-t*Lambda))+omega0 ; acceleration = -a*m.exp(-t*Lambda)
34 print ("temps de chute =", t) ; print ("vmax =",vmax) ; print ("omegamax =",omegamax) ; print ("acceleration =",acceleration)
35
36 fig, ax = plt.subplots()
37 ax.plot(axp,az,'r.',ms=2.)
38
39 ax.set(xlabel=u"Abscisse de la pointe de l'aile (m)", ylabel=u"Altitude (m)",
40       title=u"Chute en vrille d'un avion")
41 ax.grid()
42 fig.savefig("Chute-Avion.jpg")

```

Pour en savoir plus :

-Mécanique générale : Christian Gruber, Presses polytechniques romandes

-Mécanique, J.Ph. Pérez, Masson

-Mécanique , J.-L. Teyssier, J.-P. Ducourtieux, J.-P. Moliton, Armand Collin

-Rappels de mécanique du point matériel :

- http://lpsc.in2p3.fr/images/collot/Cinematique__L1.pdf