Mécanique Analytique :

Formalismes lagrangien et hamiltonien et principe de moindre action

Un pas vers la physique moderne

Obtenir des lois de la mécanique applicables dans tous les systèmes de coordonnées et tous les référentiels.

Substitution d'un formalisme énergétique à la formulation vectorielle de Newton. La mécanique devient alors une application de l'analyse .

Le concept d'énergie est général . Il est rencontré dans tous les processus naturels. Ainsi, il peut être utilisé là où les forces sont inconnues ou indéfinies , en particulier dans le monde microscopique.

Le langage et les concepts de la mécanique analytique ont servi de cadre pour le développement de la physique moderne : mécanique quantique, physique nucléaire, physique des particules, théorie quantique ou classique des champs , mécanique statistique ...

Le principe de moindre action associé aux propriétés géométriques de l'espace-temps est une méthode universelle d'édification des lois physiques fondamentales.

Rappels de calcul différentiel

Soit une fonction de N variables : $f(x_{1,}\ldots, x_i, \ldots x_n)$

différentielle totale de cette fonction : $df = \sum_{i=1,n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de f par rapport à x_i , qui s'obtient en dérivant f par rapport à la variable x_i et en considérant les N-1 autres variables comme des constantes .

La dérivée totale de f par rapport à l'une de ses variables (x_j) est alors le rapport df sur dx_j soit :

$$\frac{df}{dx_j} = \sum_{i=1,N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dx_j}$$

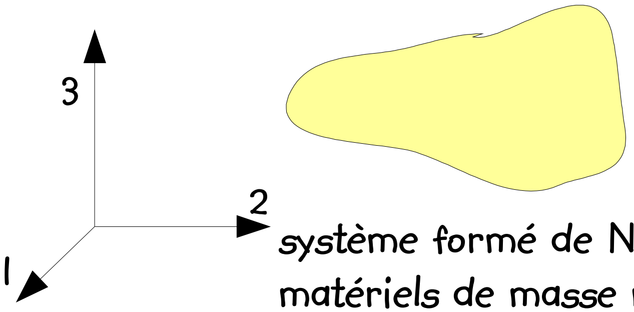
Si toutes les variables sont indépendantes : $\frac{df}{dx_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$

Changement de variables : $f(x_{1,.}.., x_i, \ldots x_N) \Rightarrow f(q_{1,}\ldots, q_j, \ldots., q_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial q_j} = \sum_{i=1,N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \qquad \frac{d f}{d q_j} = \sum_{k=1,n} \sum_{i=1,N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dq_j} = \sum_{i=1,n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dq_j}$$

Formalisme de Lagrange :coordonnées généralisées

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) : Traité de mécanique analytique présenté en 1788



système formé de N points matériels de masse m_k

référentiel inertiel et repère cartésien donc PFD s'applique

Chaque point M_k du système est repéré par 3 coordonnées cartésiennes : x_1^k, x_2^k, x_3^k

Il existe 3N coordonnées cartésiennes et le temps t pour représenter la position du système dans l'espace-temps

Dans un changement de repère (le nouveau repère pouvant être quelconque) ou/et compte tenu des propriétés structurelles du système, ces 3N coordonnées peuvent être obtenues à partir de fonctions d'un jeu de n nouvelles variables : $x_j^k(q_1 \ldots q_i \ldots q_n, t)$ avec $n \leqslant N$

Ces n nouvelles variables définissent un jeu de coordonnées généralisées du système.

Si les n coordonnées généralisées sont indépendantes, le système est dit holonôme à n degrés de liberté.
Si ça n'est pas le cas, cela résulte du fait que le système est soumis à des liaisons ou des contraintes qui imposent des conditions sur les coordonnées généralisées.

Si le système est holonôme, il est judicieux de choisir un jeu de coordonnées généralisées dont le nombre est égal au nombre de degrés de liberté.

Formalisme de Lagrange : espace de configuration

La «configuration» géométrique du système est décrit par un ensemble de n coordonnées généralisées. L'espace à n dimensions engendré par ces variables est appelé l'espace de configuration . En fonction du temps le système décrit une trajectoire dans l'espace de configuration qui peut-être relativement complexe. Par un point de cet espace peut passer plusieurs trajectoires du même système .

Quelques exemples :

Deux points matériels interagissant par gravitation : 6 degrés de liberté : 3 coordonnées de chaque point

Une sphère matérielle indéformable sans contrainte dans l'espace : 6 degrés de liberté : 3 coordonnées de son centre et 3 angles de rotation autour de son centre

Mobile auto-porteur (TP) : 3 degrés de liberté : 2 coordonnées de son centre de masse sur un plan horizontal et un angle de rotation autour de l'axe vertical passant par le centre de masse

Grand huit : 1 degré de liberté : abscisse curviligne le long du rail

Formalisme de Lagrange :équations générales de Lagrange

Dans un référentiel inertiel doté d'un repère cartésien, l'énergie cinétique du point k s'écrit :

$$T^k = \sum_{j=1,3} \frac{1}{2} m_k (\dot{x}_j^k)^2 \qquad \text{avec} \qquad \dot{x}_j^k = \frac{d(x_j^k)}{dt}$$

pour le système formé de N points :

$$T = \sum_{k=1,N} T^k = \sum_{k=1,N} \sum_{j=1,3} \frac{1}{2} m_k (\dot{x}_j^k)^2$$

Calculons :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1,N} \sum_{j=1,3} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j^k} \frac{\partial \dot{x}_j^k}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1,N} \sum_{j=1,3} m_k \dot{x}_j^k \frac{\partial \dot{x}_j^k}{\partial \dot{q}_i}$$

or :

$$d x_j^k = \sum_{i=1,n} \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x_j^k}{\partial t} dt \Rightarrow \dot{x}_j^k = \frac{d x_j^k}{dt} = \sum_{i=1,n} \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial x_j^k}{\partial t} = \sum_{i=1,n} \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_j^k}{\partial t}$$

donc :

$$\frac{\partial \dot{x}_j^k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1,N} \sum_{j=1,3} m_k \dot{x}_j^k \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}$$

Formalisme de Lagrange :équations générales de Lagrange

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\sum_{k=1,N}\sum_{j=1,3} m_k \dot{x}_j^k \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}$$, calculons maintenant : $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)=\sum_{k=1,N}\sum_{j=1,3}\left[\, m_k \ddot{x}_j^k \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}+m_k \dot{x}_j^k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}\right)\right]$$

PFD (car référentiel inertiel pour les coordonnées cartésiennes) : $m_k \ddot{x}_j^k = F_j^k$

composante j de la résultante des forces qui agissent sur le point k

$$d\left(\frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}\right)=\sum_{l=1,n}\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}\right)dq_l+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}\right)dt \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}\right)=\sum_{l=1,n}\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_l+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}\right)$$

Les opérateurs de dérivation partielle commutant , exemple : $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xt)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}(xt)\right)=1$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}\right)=\sum_{l=1,n}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x_l^k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_l+\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x_j^k}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{l=1,n}\left(\frac{\partial x_l^k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_l+\left(\frac{\partial x_j^k}{\partial t}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d(x_j^k)}{dt}\right)=\frac{\partial \dot{x}_j^k}{\partial q_i}$$

Formalisme de Lagrange :équations générales de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{k=1,N}\sum_{j=1,3}\left[m_k \ddot{x}_j^k \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i} + m_k \dot{x}_j^k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1,N}\sum_{j=1,3}\left[F_j^k \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i} + m_k \dot{x}_j^k \left(\frac{\partial \dot{x}_j^k}{\partial q_i}\right)\right]$$

$$\sum_{k=1,N}\sum_{j=1,3} m_k \dot{x}_j^k \left(\frac{\partial \dot{x}_j^k}{\partial q_i}\right) = \sum_{k=1,N}\sum_{j=1,3} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2} m_k (\dot{x}_j^k)^2\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{k=1,N}\sum_{j=1,3} \frac{1}{2} m_k (\dot{x}_j^k)^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

avec : $Q_i = \sum_{k=1,N}\sum_{j=1,3} F_j^k \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}$ forces généralisées i=1,n

Équations générales de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$, n équations pour i=1,n

Formalisme de Lagrange :cas des systèmes conservatifs lagrangien du système

Toutes les forces qui s'appliquent sur un système conservatif dérivent d'une même fonction énergie potentielle indépendante des vitesses des points qui le constituent : $V(x_{1,}^{1}x_{2,}^{1}x_{3}^{1}\ldots x_{j}^{k}\ldots x_{3}^{N})$

$$F_j^k=-\frac{\partial V}{\partial x_j^k} \qquad Q_i=\sum_{k=1,N}\sum_{j=1,3}F_j^k\frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}=-\sum_{k=1,N}\sum_{j=1,3}\frac{\partial V}{\partial x_j^k}\frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}=-\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

les équations générales de Lagrange s'écrivent alors : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial V}{\partial q_i}$

ou encore : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial (T-V)}{\partial q_i}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial (T-V)}{\partial q_i}=0 \text{ car } \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}=0$

On introduit alors la fonction scalaire appelée lagrangien du système : $L(q_i,\dot{q}_i,t)=T-V \;,[L]=\mathrm{J}$

Le lagrangien dépend des coordonnées généralisées (par T et V), de leurs dérivées totales par rapport au temps (par T) et du temps dans le cas des référentiels mobiles .

Équations de Lagrange d'un système conservatif : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$, n équations pour i=1,n

Formalisme de Lagrange : Lagrangiens généralisés

Si le système n'est pas conservatif , mais dans l'hypothèse où :

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial M^*}{\partial q_i}$$

alors , les équations générales de Lagrange se mettent sous la forme :

Équations générales de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0$$, n équations pour i=1,n

avec : $L^* = T - M^*$ lagrangien généralisé du système

M^* ne représente pas l'énergie potentielle du système

Formalisme de Lagrange : Quelques propriétés des lagrangiens

Si le lagrangrien (généralisé ou non) d'un système existe , le lagrangien : $L'(q_i, \dot{q}_i, t) = \lambda L(q_i, \dot{q}_i, t) + C$

où : λ et C sont des constantes, est également solution des équations de lagrange

De plus , le lagrangien suivant : $L''(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt}(f(q_i, t))$, est également solution des équations de lagrange

où : $f(q_i, t)$ est une fonction différentiable quelconque de q_i et t , mais pas des dérivées temporelles des q_i

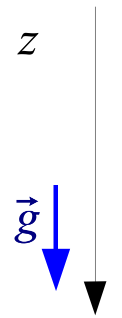
$$\frac{d}{dt}(f(q_i, t)) = \sum_{i=1,n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

donc : $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{dt}(f(q_i, t)) \right)\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d f}{dt}\right)$ car ces opérateurs de dérivation commutent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L''}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L''}{\partial q_i} = 0$$

Formalisme de Lagrange : un exemple

point matériel de masse m en chute libre



3 degrés de liberté : coordonnées cartésiennes x, y , z

Lagrangien : $$L = T - V = \frac{1}{2} m v^2 + m g z = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + m g z$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \frac{1}{2} m v^2 - mgz = cte$$

équations de Lagrange : $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$m \ddot{x} = 0 = m \ddot{y} \qquad m \ddot{z} - m g = 0$$

$$L' = \frac{1}{2} m v^2 + mgz - \frac{d}{dt}\left(m\left(gzt - \frac{1}{6} g^2 t^3\right)\right)$$ est un lagrangien équivalent

$$L' = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m (v_z - g t)^2$$ énergie cinétique dans le référentiel en chute libre

Formalisme d'Hamilton : espace de phase et hamiltonien

La formulation de Lagrange , et pour un système à n degrés de liberté, conduit à n équations à n inconnues q_i . Ce sont des équations différentielles du second ordre .

William Hamilton (1805-1865) a développé une autre formulation équivalente qui fait appel à 2n équations différentielles du premier ordre au prix d'un doublement du nombre de variables (2n variables considérées indépendantes) . Cette formulation est plus symétrique et pour les problèmes conservatifs, elle conduit à une interprétation simple.

Pour un système dont le lagrangien L (généralisé ou pas) est défini, on introduit n nouvelles variables p_i indépendantes appelées moments conjugués , définies par :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

L'espace de phase dans lequel le système évolue comporte 2n dimensions correspondant aux q_i et p_i . Par un point de cet espace ne passe alors qu'une trajectoire qui peut éventuellement être cyclique.

L'hamiltonien du système est alors défini par : $$H = \sum_{i=1,n} p_i\, \dot{q}_i - L \qquad \text{avec} \quad [H] = \text{J}$$

Calculons sa dérivée totale temporelle : $$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1,n} p_i\, \dot{q}_i - L\Big) = \sum_{i=1,n} [\dot{p}_i\, \dot{q}_i + p_i\, \ddot{q}_i] - \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1,n} [\dot{p}_i\, \dot{q}_i + p_i\, \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i] - \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{i=1,n} [\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)\dot{q}_i - p_i \ddot{q}_i] - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Formalisme d'Hamilton : équations d'Hamilton

Ou encore :

$$d\,H = \sum_{i=1,n} [\dot{q}_i\, dp_i - \dot{p}_i\, dq_i] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad = \sum_{i=1,n} [\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i] + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

On voit ici que H ne dépend pas des dérivées temporelles des coordonnées généralisées , donc : $H(q_i, p_i, t)$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$$

6n + 1 équations différentielles du premier ordre d'Hamilton

Si le lagrangien du système ne dépend pas explicitement du temps, alors son hamiltonien est constant :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 = \frac{dH}{dt} \Rightarrow H = Cte$$

Formalisme d'Hamilton : hamiltonien des systèmes conservatifs

$$L = T - V$$ où : V est l'énergie potentielle du système qui ne dépend que des coordonnées généralisées, mais pas de leurs dérivées par rapport au temps

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

$$H = \sum_{i=1,n} p_i\,\dot{q}_i - L = \sum_{i=1,n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - T + V$$

Si le système est analysé dans un repère à axes fixes par rapport à un référentiel inertiel, alors l'énergie cinétique est une fonction homogène de degré 2 des dérivées par rapport au temps des coordonnées généralisées. On peut alors appliquer l'identité d'Euler :

$$\sum_{i=1,n} x_i \frac{\partial f^n}{\partial x_i} = n\, f^n$$ où : f^n est une fonction homogène de degré n des variables x_i

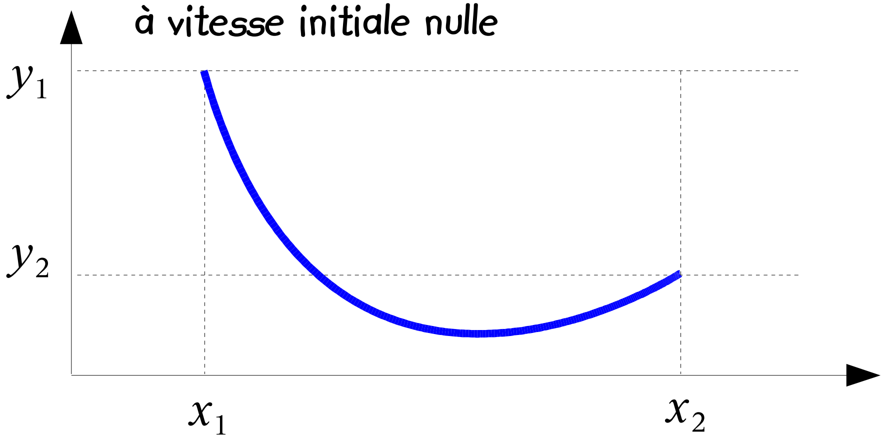
$$H = \sum_{i=1,n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - T + V = 2T - T + V = T + V = E_m$$

H est égal à l'énergie mécanique du système qui est constante

Calcul de variations : un exemple, le temps de descente la plus rapide

Dans un plan vertical entre deux altitudes $y_1 > y_2$, descente d'un point matériel soumis à un champ de pesanteur constant g , sans frottement et à vitesse initiale nulle

Résolu par Jean Bernouilli en 1696 : problème de la courbe brachistochrone



On cherche la trajectoire $y(x)$ qui minimise t .

$$dt = \frac{dl}{V}$$

$$dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = dx\sqrt{1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}} = dx\sqrt{1+y'^2}$$

avec : $y' = \frac{dy}{dx}$

$$mg\,y_1 = m\,g\,y(x)+\frac{1}{2}m\,V(x)^2 \Rightarrow \sqrt{(2g(y_1-y(x)))} = V(x)$$

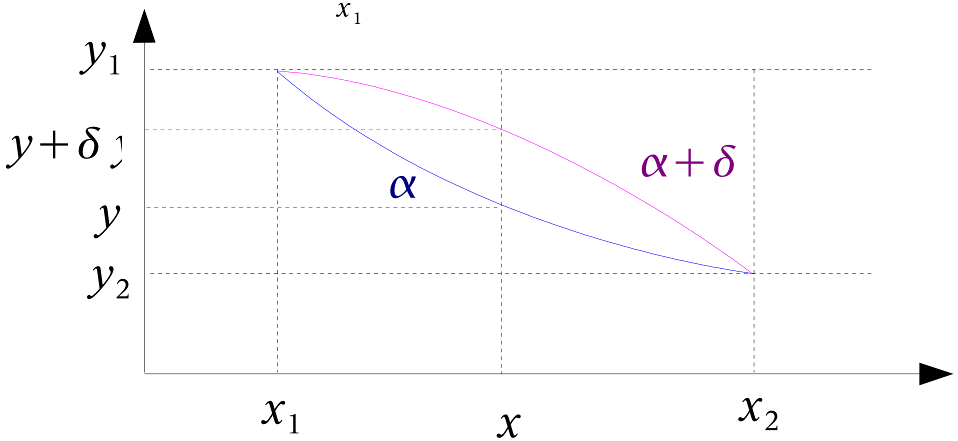
$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{\sqrt{(y_1-y(x))}}\,dx$$

On est alors amené à rendre minimale une intégrale I d'une fonction F(y, y', t) entre x_1 et x_2 :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\,dx$$

calcul de variations : stationnarité d'une intégrale sur un chemin

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\, dx$$ avec : $y(x)$ la fonction de chemin et $y' = \frac{dy}{dx}$



On cherche la fonction de chemin pour laquelle I est minimale.
On supposera que la fonction de chemin recherchée dépend d'un paramètre alpha additionnel donc :

$$y(\alpha, x)$$

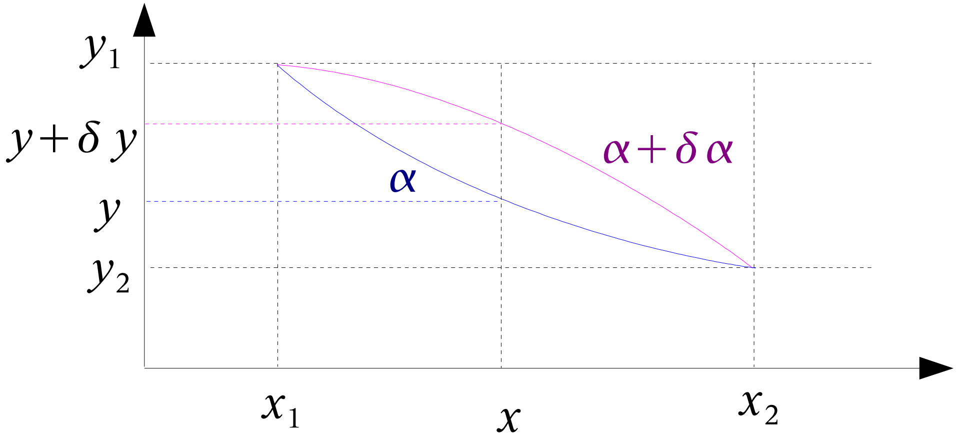
Ici la variation des variables correspond à des différences engendrées par des modifications de chemin . Ça ne correspond pas exactement à un calcul différentiel total , d'où le symbole différent utilisé.

On a alors : $\delta y = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta\alpha$ et : $\delta y' = \frac{d}{dx}(y+\delta y) - \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\delta y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) \delta\alpha$

d'où pour une valeur de x donnée (donc constante, donc $\delta x = 0$) :

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' = \left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\right]\delta\alpha$$

calcul de variations : stationnarité d'une intégrale sur un chemin



$$I=\int_{x_1}^{x_2} F(y,y',x)\,dx$$

La condition de stationnarité se traduit par (en gardant à l'esprit que c'est le chemin qui change pas x) :

$$\delta I=0$$

$$\delta I=0=\int_{x_1}^{x_2}\delta F(y,y',x)\,dx=\delta\alpha\int_{x_1}^{x_2}[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\frac{\partial y}{\partial\alpha})]dx$$

On utilise la formulation d'intégration par parties pour le deuxième terme : $\int U\,dV=[UV]-\int V\,dU$

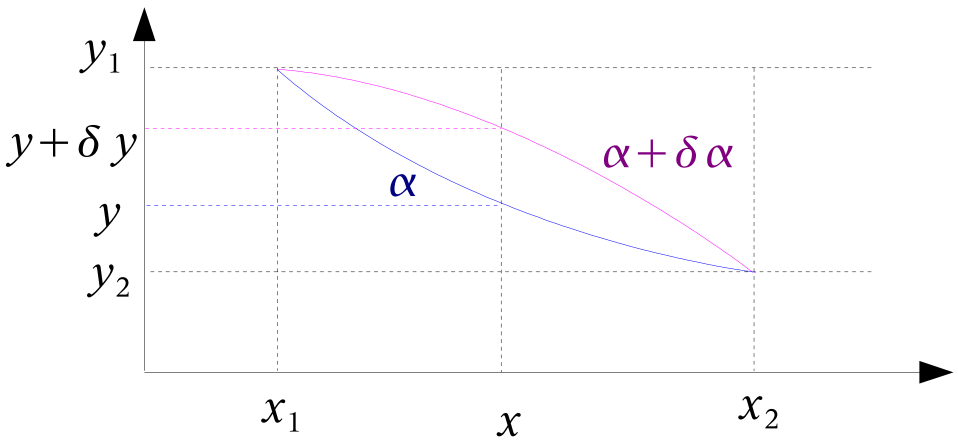
$$0=\int_{x_1}^{x_2}[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})\frac{\partial y}{\partial\alpha}]dx+[\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial\alpha}]_{x_1}^{x^2}$$

Or les chemins arrivent et partent tous des mêmes points , donc :

$$\delta y(x_1)=0=\frac{\partial y(x_1)}{\partial\alpha}\delta\alpha\Rightarrow\frac{\partial y(x_1)}{\partial\alpha}=0=\frac{\partial y(x_2)}{\partial\alpha}$$

d'où : $0=\int_{x_1}^{x_2}[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})]\frac{\partial y}{\partial\alpha}dx$

calcul de variations : stationnarité d'une intégrale sur un chemin



$$I=\int_{x_1}^{x_2} F(y,y',x)\,dx$$

La condition de stationnarité se traduit par :

$$\delta I=0$$

$$0=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\alpha}dx$$

Le résultat ne peut pas dépendre de α ni donc de $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$

Cela impose que pour toute valeur de x :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

qui a la même forme que les équations de Lagrange à condition de remplacer F par L, y par q_i et x par t .

Principe d'Hamilton : stationnarité de l'action hamiltonienne
Principe de moindre action synchrone

L'action hamiltonienne est définie par :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt \quad \text{avec} \quad [S] = \text{J.s}$$

Le principe de moindre action d'Hamilton stipule alors que l'évolution réelle en temps du système mécanique est alors simplement obtenue pour une action stationnaire, c'est-à-dire :

$$\delta S = 0$$

cette variation de l'action est dite synchrone car on travaille à : $\delta t = 0$

La stationnarité de l'action n'implique pas nécessairement que S est minimale . On peut cependant montrer que lorsque la différence de temps n'est pas trop grande cela conduit à une valeur minimale de S .

Cette condition conduit aux équations de Lagrange et en remplaçant L par sa définition en fonction de l'hamiltonien , elle aboutit également aux équations d'hamilton .

Le principe de moindre action d'hamilton est l'un des piliers de la physique moderne . On peut édifier toutes les théories actuelles (mécaniques classique et quantique, relativité, théorie des champs , électromagnétisme, optique ...) en partant de ce principe .

Le principe d'inertie comme une conséquence des propriétés de l'espace-temps et du principe de moindre action

En mécanique classique, l'espace-temps absolu est homogène et isotrope . Cela signifie qu'un système physique libre déplacé dans l'espace ou dans le temps évolue de la même manière.
Cela signifie également qu'une rotation d'un système libre n'en modifie pas son évolution .

Un point matériel de masse m libre a trois degrés de libertés .

On choisit le jeu de coordonnées correspondant aux coordonnées cartésiennes par rapport à un référentiel absolu : fixe / à l'espace . En supposant qu'il en existe un !

Le Langrangien L dont on tire l'évolution de m ne peut pas être une fonction de la position du point ni du temps de manière explicite. Il ne peut pas être non plus une fonction du vecteur vitesse car une rotation en changerait la valeur . L ne peut être qu'une fonction du module de la vitesse qui est bien invariant par rotation . De plus, L a la dimension d'une énergie (J = Kg m^2 s^{-2}), on saisit alors que la seule expression générale qui satisfait toutes ces conditions est :

$$L = \lambda\, m v^2 = \lambda\, m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \text{ où est une constante sans dimension}$$

Du principe de moindre action, duquel les équations de Lagrange découlent, on déduit :

$$\lambda m \ddot{x} = 0 = \lambda m \ddot{y} = \lambda m \ddot{z}$$

ce qui implique bien que le point matériel est soit au repos (si v=0) soit en mouvement rectiligne et uniforme

Le principe d'inertie comme une conséquence des propriétés de l'espace-temps et du principe de moindre action

En vertu des propriétés des lagrangiens :

$$L' = \lambda\, m v^2 = \lambda\, m v^2 - m\,\lambda \frac{d}{dt}((2\vec{u}\cdot\vec{r} - u^2 t)),\quad \vec{u}$$

représentant un vecteur constant et $\vec{r}$ le vecteur position dans le repère fixe

$L' = \lambda\, m(\vec{v} - \vec{u})^2$ décrit le même système dans un référentiel se déplaçant à vitesse constante par rapport au référentiel absolu .

On en déduit alors que : $\ddot{x}' = \ddot{y}' = \ddot{z}' = 0$

Un point matériel libre est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel non-accéléré

Ce principe découle des propriétés de l'espace et du principe de moindre action