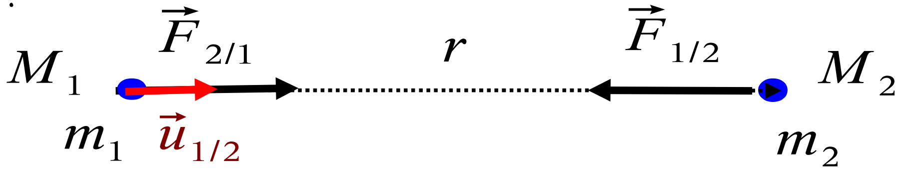
Gravitation

Force gravitationnelle

Entre deux masses ponctuelles m_1 et m_2 séparées de la distance r et situées aux points M_1 et M_2 :



$\vec{u}_{1/2}$ vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2

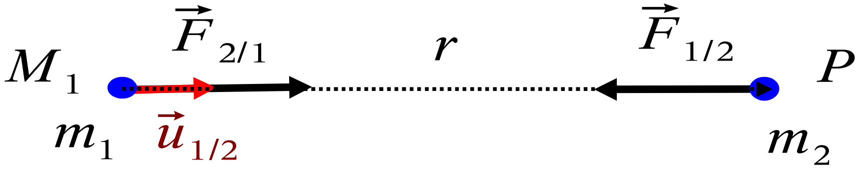
$$\vec{F}_{1/2} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1/2} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^3} \overrightarrow{M_1 M_2} \qquad \vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$$

K_G (cte de gravitation universelle) = 6,67430(15) 10^{-11} $m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$ (ou $N\,m^2\,kg^{-2}$)

Cette loi s'applique également à des solides présentant des répartitions de masse sphériques (théorème de Gauss) . Ces solides apparaissent alors comme des points sur lesquels seraient concentrées toutes leurs masses .

Champ de gravitation

Entre deux masses ponctuelles m_1 et m_2 séparées de la distance r et situées aux points M_1 et P :



$$\vec{F}_{1/2} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1/2}$$

$$\vec{G}(P) = -K_G \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_{1/2}$$

champ vectoriel – «Propriété» de l'espace induite par la présence de la masse m_1 au point M_1

$$[G] = m\, s^{-2}$$

$$\vec{F}_{1/2} = m_2 \vec{G}(P)$$

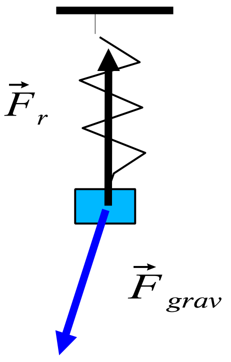
Si G est produit par une distribution de masse quelconque (non plus une masse ponctuelle), son expression diffère de celle qui est donnée ci-dessus, mais la relation ci-contre reste vraie.

Si la force de gravitation est la seule à s'exercer sur m_2 : $\vec{F}_{1/2} = m_2 \vec{G}(P) = m_2 \vec{\Gamma}(P) \Rightarrow \vec{G}(P) = \vec{\Gamma}(P)$

Un champ de gravitation est localement «équivalent» à un champ d'accélération (Principe d'équivalence d'Einstein) si la masse pesante est égale à la masse inerte (ce qui est vérifié à une très grande précision) (Principe d'équivalence de Newton).

Poids

Définition :

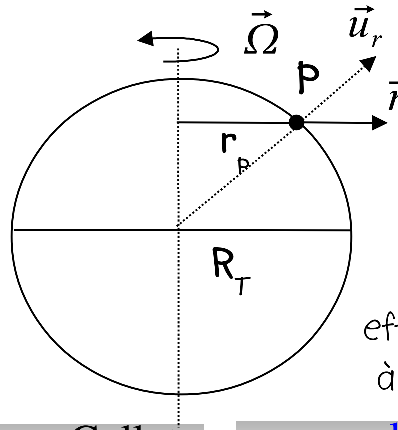


Effet de la force de gravitation de la terre sur l'objet (en bleu) . De plus, la terre tourne sur elle-même et se déplace autour du soleil. L'objet est donc accéléré si on l'examine par rapport à un référentiel inertiel astronomique (CM du système solaire + axes pointant sur des étoiles) .

$$\vec{F}_r + \vec{F}_{grav} = m\vec{\Gamma}$$

On définit le poids comme étant la force opposée à celle développée par le ressort : $\vec{P} = -\vec{F}_r$

$$\vec{P} = -\vec{F}_r = \vec{F}_{grav} - m\vec{\Gamma}$$



$$\vec{\Gamma} = -r_p \Omega^2 \vec{n}$$

$\vec{n}$ est parallèle au plan équatorial terrestre

$$\vec{P} = -K_G \frac{m M_T}{R_T^2} \vec{u}_r + m r_p \Omega^2 \vec{n}$$

Poids à la surface de la terre si l'on suppose que la terre est sphérique et si l'on néglige son accélération dans son mouvement autour du soleil

effet max. à l'équateur

$$R_T \Omega^2 = 0{,}034 \ m\, s^{-2}$$

Cet effet est observable en mesurant la période d'un pendule en fonction de la latitude

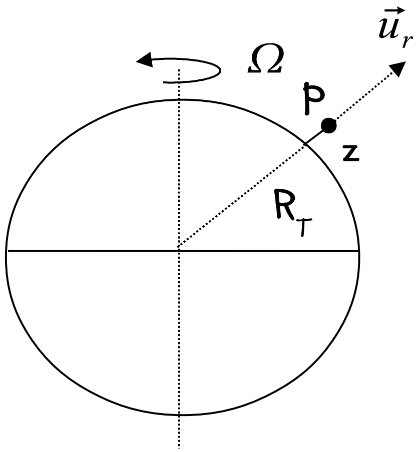
Champ de pesanteur terrestre

$\frac{\vec{P}}{m} = \vec{g}$ Si l'on néglige l'effet de la rotation de la terre sur elle-même nous obtenons :

$$\vec{g}(z=0) = -K_G \frac{M_T}{R_T^2} \vec{u}_r = -g_0 \vec{u}_r$$ car à la surface de la terre : $r = R_T$

$$\vec{g}(z) = -K_G \frac{M_T}{(R_T+z)^2} \vec{u}_r = -g(z)\vec{u}_r \Rightarrow g(z) = g_0 \left(\frac{R_T}{R_T+z}\right)^2 \simeq g_0\left(1-2\frac{z}{R_T}\right)$$ à une altitude z

g baisse de 0,3 % à 10 km d'altitude

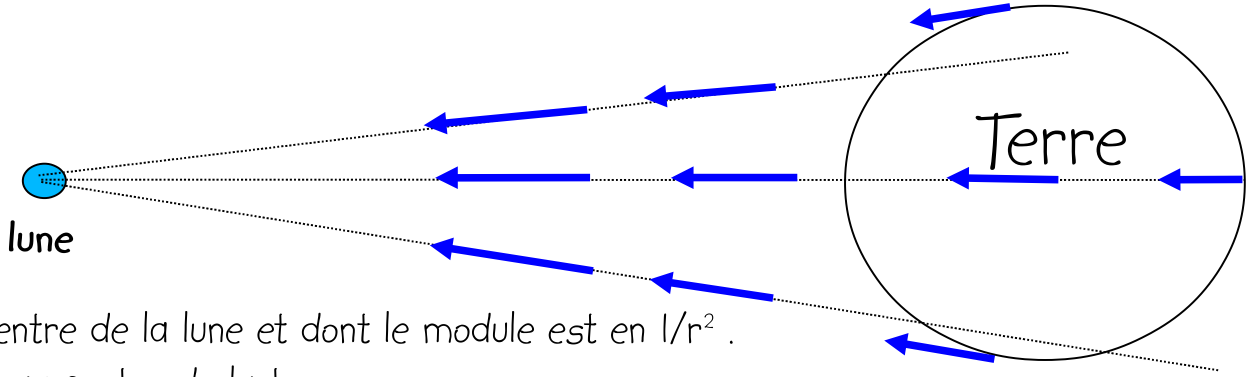


D'autres subtilités :

- aplatissement de la terre aux pôles : contribution pointant vers l'équateur , là où il y a plus de masse
- accélération de la terre dans son mouvement autour du soleil , contribution constante sur toute la terre et dirigée vers le soleil
- effet de la lune : phénomène des marées

Les marées

Examinées à l'aide du principe d'équivalence : le champ de gravitation lunaire est équivalent à un champ d'accélération de la sorte :

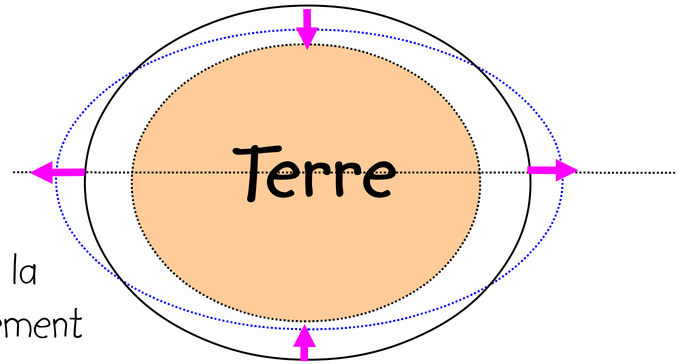


Accélération dirigée vers le centre de la lune et dont le module est en $1/r^2$.

Vu par rapport au repère lié au centre de la terre :

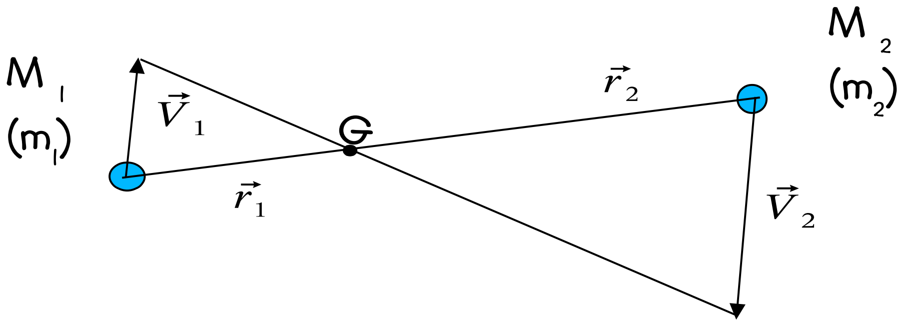
Conclusion : La couche océanique se déforme avec deux hautes mers et deux basses mers en 24 h 52 mn (compte tenu du mouvement de rotation de la lune autour de la terre)

La sphère solide terrestre se déforme également : marées de terre, mais d'amplitudes plus faibles



Les marées lunaires freinent la rotation de la terre ce qui change la durée du jour par 0,0165 s tous les 1000 ans et provoque l'éloignement de la lune de 3 cm par an

Problème des deux corps (ex. Terre-Soleil)



$$\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1G} + \overrightarrow{GM_2} = -\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{GM_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0} = m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2(\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}) = m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_1} + m_2\vec{r}$$

$$\overrightarrow{GM}_1 = -\frac{m_2\vec{r}}{m_1+m_2} = \vec{r}_1 \qquad \overrightarrow{GM}_2 = \frac{m_1\vec{r}}{m_1+m_2} = \vec{r}_2 \qquad m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad (1)$$

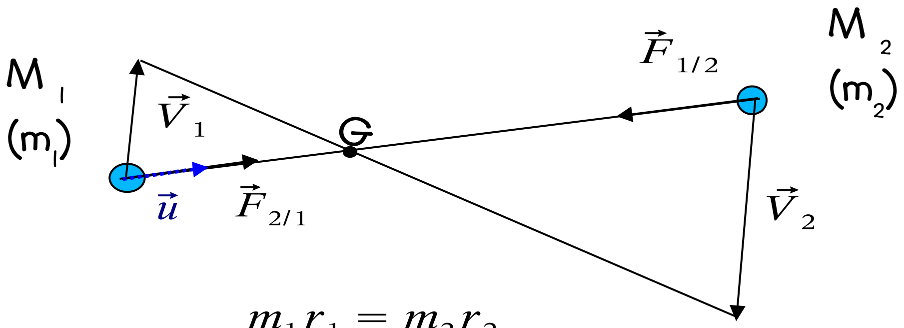
Repère galiléen lié au Centre de Masse G :
Tout le reste se fera dans le repère du CM

Somme des quantités de mouvement est nulle dans le repère GXYZ (repère du CM)

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = \vec{0} \Rightarrow m_1\vec{V}_1 = -m_2\vec{V}_2 \quad (2) \qquad (2)/(1) \Rightarrow \frac{\vec{V}_1}{r_1} = -\frac{\vec{V}_2}{r_2}$$

La plus grande masse a la plus petite vitesse et elle est la proche du CM . De plus les vitesses sont colinéaires donc contenues dans le même plan qui contient G par ailleurs .

Problème des deux corps : PFD dans GXYZ



$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

$$m_1 \frac{d^2(\overrightarrow{GM}_1)}{dt^2} = \vec{F}_{2/1} \qquad (3)$$

$$m_2 \frac{d^2(\overrightarrow{GM}_2)}{dt^2} = \vec{F}_{1/2} \qquad (4)$$

$$-(3)/m_1 + (4)/m_2 \Rightarrow$$

$$\frac{-d^2(\overrightarrow{GM_1})}{dt^2} + \frac{d^2(\overrightarrow{GM_2})}{dt^2} = -\frac{\vec{F}_{2/1}}{m_1} + \frac{\vec{F}_{1/2}}{m_2} = \frac{d^2(\overrightarrow{M_1G} + \overrightarrow{GM_2})}{dt^2} = \frac{d^2(\overrightarrow{M_1M_2})}{dt^2} = \frac{d^2(r\vec{u})}{dt^2}$$

$$\frac{d^2(r\vec{u})}{dt^2} = \left(-K_G\frac{m_1 m_2}{r^2 m_1} - K_G\frac{m_1 m_2}{r^2 m_2}\right)\vec{u} = -K_G\frac{(m_1+m_2)}{r^2}\vec{u} \qquad (5)$$

Masse réduite : $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)^{-1}$ $\qquad \mu\dfrac{d^2(r\vec{u})}{dt^2} = = -K_G\dfrac{(m_1 m_2)}{r^2}\vec{u}$

Un point matériel portant une masse égale à μ, est soumise à la force gravitationnelle entre les deux masses

Problème des deux corps : Moment cinétique

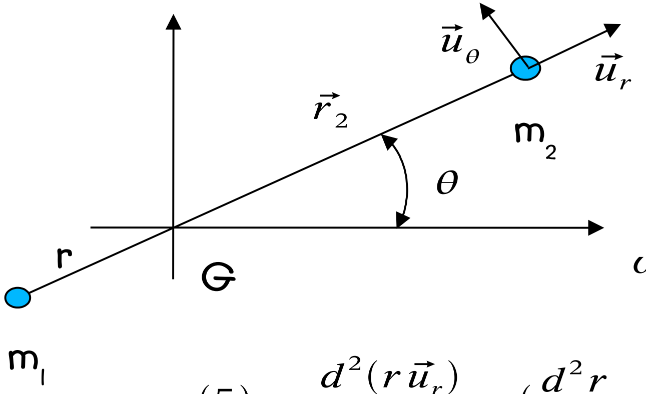
Revoir le cas de la force centrale : le problème à deux corps isolés en est un exemple

TMC : $\frac{d}{dt}(\vec{L}_{tot/G}) = \sum \vec{m}_{\vec{F}_{ext}/G} = \vec{0}$ car le système est isolé ,

$$\vec{L}_{tot/G} = \overrightarrow{Cte} = \vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{V}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{V}_2 \qquad \vec{L}_{tot/G} \perp \ plan \ (G, \vec{r}_1, \vec{V}_1)$$

Le mouvement reste contenu dans le plan : $(G, \vec{r}_1, \vec{V}_1)$

Problème des deux corps : Résolution



en coordonnées polaires , G étant l'origine du référentiel :

$$\frac{d^2(r\,\vec{u}_r)}{dt^2} = -K_G\frac{(m_1+m_2)}{r^2}\vec{u}_r \qquad (5)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad r = \frac{m_1+m_2}{m_1} r_2 \Rightarrow \frac{d^2(r\,\vec{u}_r)}{dt^2} = \frac{(m_1+m_2)}{m_1}\frac{d^2(r_2\vec{u}_r)}{dt^2}$$

$$(5) \Rightarrow \frac{d^2(r\,\vec{u}_r)}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)\vec{u}_r + \left(2\omega\frac{dr}{dt} + r\frac{d\omega}{dt}\right)\vec{u}_\theta = -K_G\frac{(m_1+m_2)}{r^2}\vec{u}_r$$

d'où ,

$$\left(2\omega\frac{dr}{dt} + r\frac{d\omega}{dt}\right) = 0 \qquad 2\omega\,dr + r\,d\omega = 0 \Rightarrow 2\frac{dr}{r} + \frac{d\omega}{\omega} = 0 \Rightarrow 2\ln(r) + \ln(\omega) = Cte$$

$$r^2\omega = C \quad \text{Loi des aires} \quad (6)$$

$$\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right) = -K_G\frac{(m_1+m_2)}{r^2}, \qquad r^4\omega^2 = C^2 \Rightarrow r\omega^2 = \frac{C^2}{r^3}, \qquad \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} + K_G\frac{(m_1+m_2)}{r^2} = 0 \qquad (7)$$

$r(t_0)$ et $\omega(t_0)$ sont les conditions initiales et fixent C

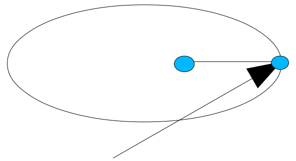
Problème des deux corps : Résolution

Changement de variable : $r = \frac{1}{u}$ $\qquad dr = -\frac{1}{u^2} du$

$$r^2 \omega = C \Rightarrow d\theta = \frac{C}{r^2} dt = C u^2 dt \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{C u^2} \qquad \frac{dr}{dt} = -C \frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d(-C \frac{du}{d\theta})}{dt} = -C^2 u^2 \frac{d(\frac{du}{d\theta})}{d\theta} = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

$$(7) \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} + K_G \frac{(m_1+m_2)}{r^2} = 0 \Rightarrow -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - C^2 u^3 + K_G (m_1+m_2) u^2 = 0$$



$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = K_G \frac{(m_1+m_2)}{C^2} \qquad (8)$$

solution : $u(\theta) = A\cos(\theta) + \frac{K_G(m_1+m_2)}{C^2}$

$si\ \theta = 0\ à\ t = t_0$

Problème des deux corps : Résolution

$$r(\theta) = \frac{1}{A\cos(\theta) + \frac{K_G(m_1+m_2)}{C^2}} = \frac{q}{1 + A\,q\cos\theta}$$ avec $$q = \frac{C^2}{K_G(m_1+m_2)}$$

q est la valeur de r lorsque : $\theta = \frac{\pi}{2}$

(6) Loi des aires $r^2\omega = C$

A est fixé par les conditions initiales à t=t$_0$: $r(0) = r_0 = \dfrac{1}{(\frac{1}{q} + A)} \Rightarrow A = \dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{q}$

On pose finalement : $A.q = e$

$$r(\theta) = \frac{q}{1 + e\cos\theta}$$

la trajectoire est une conique , et e est appelée l'excentricité

- e = 0 , c'est un cercle ;
- 0 < e < 1 , ellipse ;
- e = 1 , parabole
- e > 1 , hyperbole

e est donnée par les conditions initiales et par m_1 et m_2

Les ellipses et les hyperboles sont les trajectoires les plus courantes : ellipses : astres ou satellites captifs, hyperboles : astres ou sondes libres

Problème des deux corps : mouvement circulaire

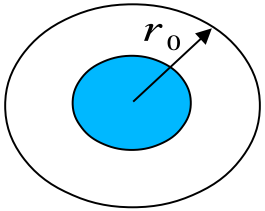
$$e = 0 \Rightarrow r(\theta) = r_0 = q = \frac{C^2}{K_G(m_1+m_2)}$$

$$C = r_0^2\omega \qquad r_0 = q = \frac{r_0^4\omega^2}{K_G(m_1+m_2)} \Rightarrow K_G(m_1+m_2) = r_o^3\omega^2$$

La vitesse angulaire est constante, donc le mouvement est circulaire et uniforme

exemple : satellite artificiel autour de la terre en orbite circulaire

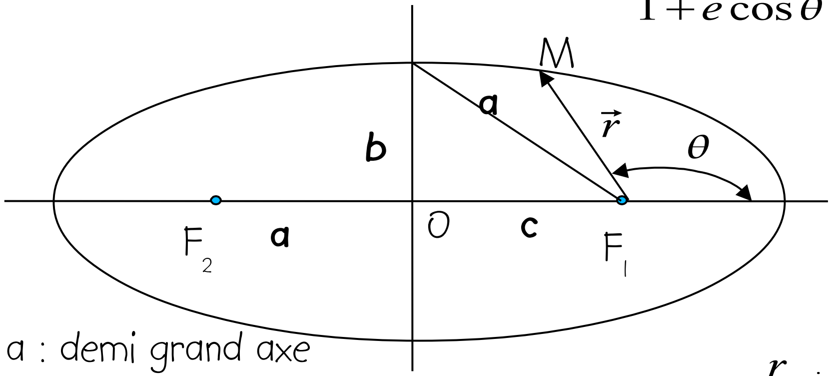
$$m_1+m_2 \simeq M_T$$



$$\omega^2 = K_G\frac{M_T}{r_0^3}$$

Problème des deux corps : mouvement elliptique

$0<e<1$ $\qquad r(\theta)=\dfrac{q}{1+e\cos\theta}$



exemple : terre – soleil – le soleil se trouve sur l'un des foyers de l'ellipse

$$r_{min}=\frac{q}{(1+e)}\ (\text{ périhélie })\qquad q=2\frac{r_{max}\,r_{min}}{r_{max}+r_{min}}$$

$$r_{max}=\frac{q}{1-e}\ (\text{ aphélie })\qquad e=\frac{r_{max}-r_{min}}{r_{max}+r_{min}}$$

a : demi grand axe

b : demi petit axe

c : distance focale

$$r_{min}=a-c \qquad r_{max}=a+c$$

$$a=(r_{max}+r_{min})/2 \quad \text{et} \quad c=(r_{max}-r_{min})/2 \;\Rightarrow\; c=e\,a$$

$$r_{min}+r_{max}=2a\Rightarrow a=\frac{q}{(1-e^2)} \qquad F_1M+F_2M=2a \;\Rightarrow\; a^2=b^2+c^2\Rightarrow b=a\sqrt{1-e^2}$$

loi des aires : $\quad S(T)=\pi\,a\,b=\dfrac{C}{2}T\Rightarrow ab=C\dfrac{T}{2\pi}\Rightarrow$ Aire balayée durant une période

$$T^2=4\pi^2\frac{a^2b^2}{C^2}=4\pi^2\frac{a^2b^2}{K_G(m_1+m_2)\,q}=4\pi^2\frac{a^2a^2(1-e^2)}{K_G(m_1+m_2)\,q}=4\pi^2\frac{a^3}{K_G(m_1+m_2)}$$

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{K_G(m_1+m_2)}$$

Pour le système solaire : $\quad m_1+m_2\simeq m_{soleil}$

Lois de Képler : système solaire

1ère loi : la nature des trajectoires - Les orbites des planètes sont des ellipses dont l'un des foyers est occupé par le soleil .

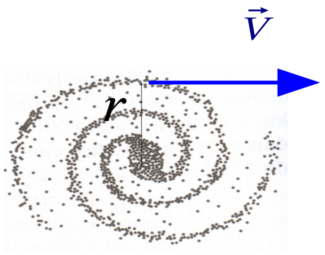
2ème loi : loi des aires – En des temps égaux , les surfaces balayées par le rayon vecteur d'une planète sont égales

3ème loi : loi harmonique - Les carrés des périodes de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des demi grands axes des ellipses parcourues .

Caractéristiques des planètes solaires

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
nbre de satellites	0	0	1	2	28	30	20	8
demi grand axe en millions de km	57,9	108,2	149,6	227,9	778,3	1429,4	2875	4504,4
excentricité de l'orbite	0,2056	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0464	0,0095
inclinaison de l'orbite sur l'ecliptique	7°,005	3°,3947	0	1°,8497	1°,3033	2°,4889	0°,7732	1°,7700
Période de révolution	88 j	224 j	365 j	1 an et 321 j	11 ans et 314 j	29 ans et 167 j	84 ans et 7 j	164 ans et 281 j
Période de rotation propre	58 j	243 j	23,93 h	24,62 h	9,92 h	10,66 h	17,22 h	16,11 h
Diamètre équatorial (relatif à celui de la terre)	0,382	0,949	1,000	0,533	11,209	9,434	4,007	3,883
Masse (relative à celle de la terre)	0,055	0,815	1,000	0,107	317,800	95,160	14,540	17,150

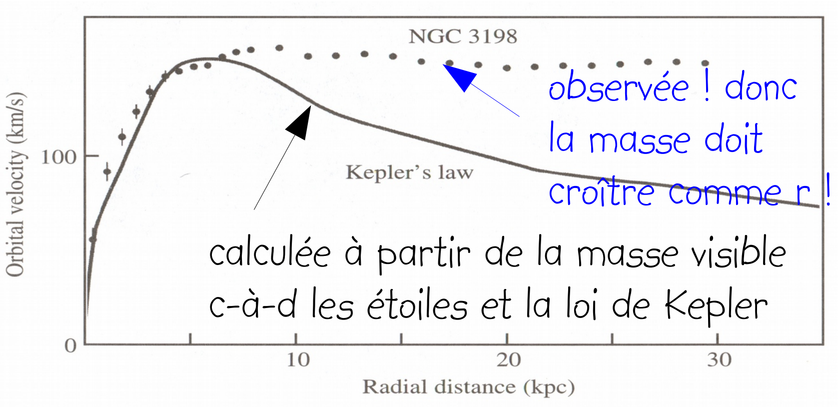
Matière cachée dans les galaxies



Mesure de la vitesse de rotation des étoiles dans une galaxie spirale.

En supposant que la masse est distribuée dans la galaxie selon une symétrie sphérique, on devrait observer une vitesse de rotation en accord avec la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K_G(M(r))}$$ où $M(r)$ est la somme de la masse contenue dans une sphère de rayon r centrée sur le centre de la galaxie



En prenant une orbite circulaire (pour simplifier) :

$$a = r \Rightarrow \frac{r^2}{T^2} = \frac{K_G M(r)}{4\pi^2 r} \Rightarrow V(r) = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{K_G M(r)}{r}}$$

Lorsque l'étoile observée est à l'extérieur du coeur de la galaxie :

$$M(r) = cte \Rightarrow V(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$