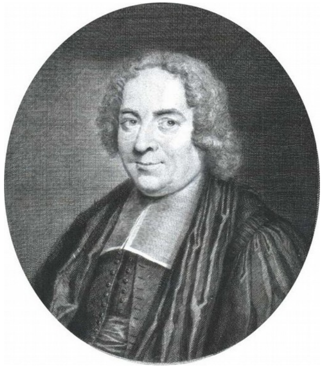
Cinématique

Description «mathématique» du mouvement des corps (ici de points matériels) sans en évoquer les causes.

Cette discipline de la mécanique fait appel à la géométrie analytique et au calcul infinitésimal.

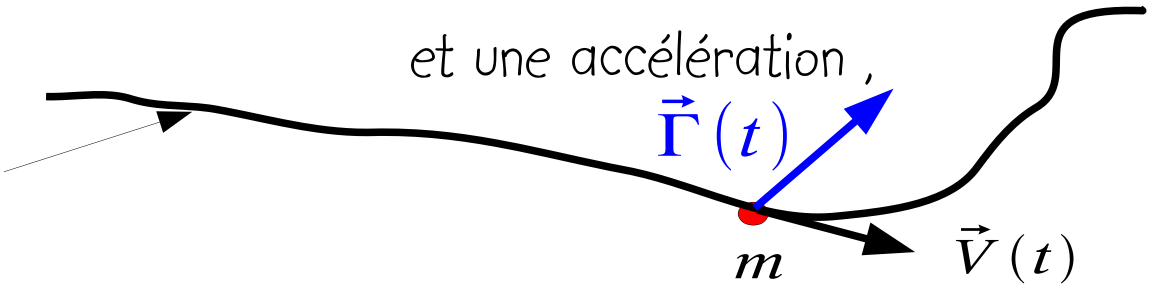
Introduite de 1698 à 1700 par Pierre Varignon [1654-1722]



Un point matériel - de masse m - sans dimension appréciable, dans un espace « absolu », euclidien, à trois dimensions homogène et isotrope : notre Univers « vide » et « infini », évolue selon un temps t «absolu» qui s'écoule en tout point de la même manière,

en décrivant une trajectoire

et une accélération ,

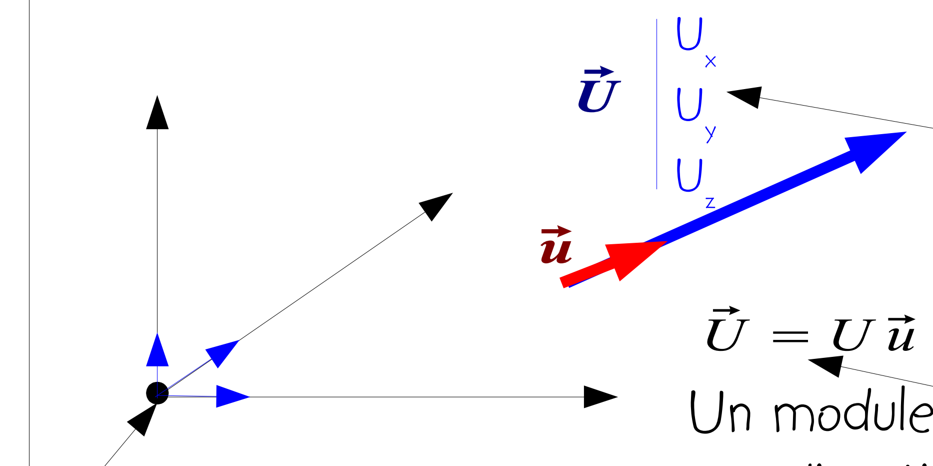


avec une vitesse,

Référentiels, repères, vecteurs

De nombreuses grandeurs mécaniques sont modélisées par des vecteurs.

référentiel : une partie de l'espace, exemple : le laboratoire



3 coordonnées pour les 3 dimensions spatiales

$\vec{U} = U\,\vec{u}$

Un module : U

une direction et un sens :

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire

$||\vec{u}|| = u = 1$

repère fixe /réf.

vecteurs variables, différentielles et dérivées

Différentielle == accroissement infinitésimal d'une grandeur

lié à l'évolution infinitésimale de variables

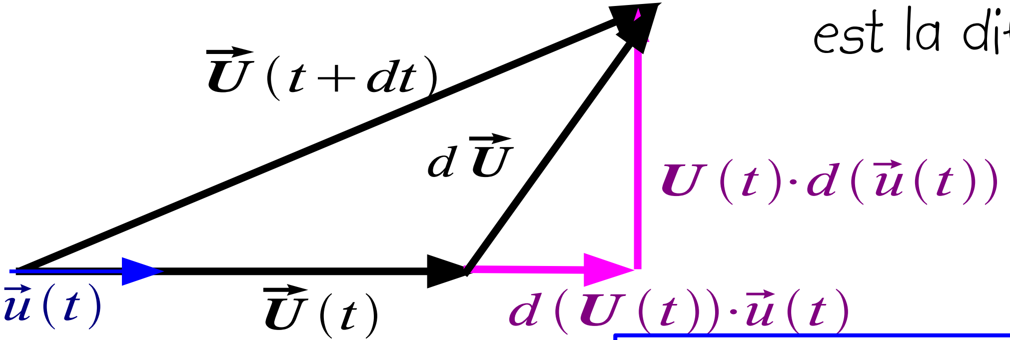
dt laps de temps infinitésimal mais non nul

$$\vec{U}(t+dt)=\vec{U}(t)+d\vec{U}$$

$$d\vec{U}=\vec{U}(t+dt)-\vec{U}(t)$$

est la différentielle de $\vec{U}$

$\dfrac{d\vec{U}}{dt}$ est la dérivée par rapport au temps (derivative)



$$\boxed{\begin{aligned} d\vec{U} &= d(\,U(t)\,\vec{u}(t)\,) \\ &= d(U(t))\cdot\vec{u}(t)+U(t)\cdot d(\vec{u}(t)) \end{aligned}}$$

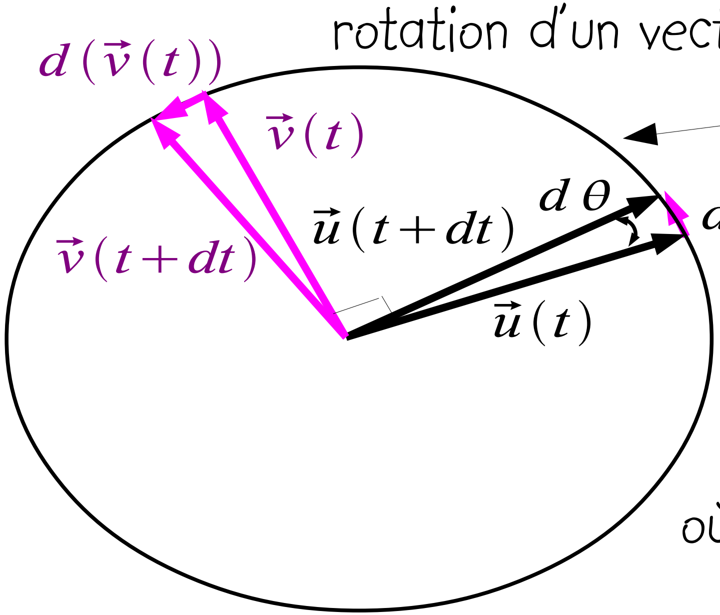
$$\forall\, t\,,\, u(t) = 1$$

$$d(u(t)^2) = d(1) = 0 = d(\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)) = \vec{u}(t)\cdot d(\vec{u}(t)) + d(\vec{u}(t))\cdot\vec{u}(t)$$

$$\Rightarrow 2\vec{u}(t)\cdot d(\vec{u}(t)) = 0$$

$d(\vec{u}(t))$ est orthogonale à $\vec{u}(t)$ (vecteur unitaire)

différentielle d'un vecteur unitaire dans un plan



$$d(\vec{u}(t)) = d\theta\, \vec{v}(t)$$

$$\boxed{\frac{d(\vec{u}(t))}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{v}(t) = \omega(t)\vec{v}(t)}$$

où $\omega(t) = \dfrac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire ou de rotation (angular velocity)

$$[\omega] = \mathbf{rad\,s^{-1}}$$

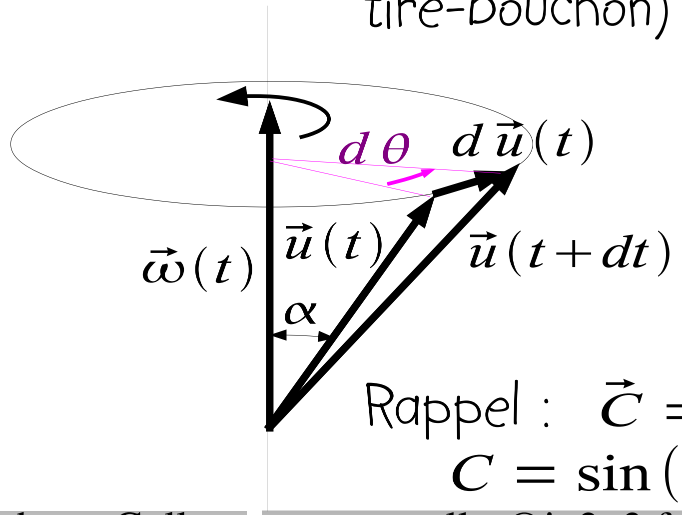
$$d(\vec{v}(t)) = -d\theta\, \vec{u}(t)$$

$$\boxed{\frac{d(\vec{v}(t))}{dt} = -\omega(t)\vec{u}(t)}$$

différentielle d'un vecteur unitaire dans l'espace

C'est une rotation d'un vecteur unitaire

Soit $\vec{\omega}(t)$ le vecteur rotation porté par l'axe de la rotation, dont le module est la vitesse angulaire et dont le sens représente le sens de rotation (règle du tire-bouchon)



$$d\,u(t) = \sin(\alpha)\,u(t)\,d\theta = \sin(\alpha)\,d\theta$$

$$\frac{d\,u(t)}{dt} = \sin(\alpha)\,\frac{d\theta}{dt} = \sin(\alpha)\,\omega$$

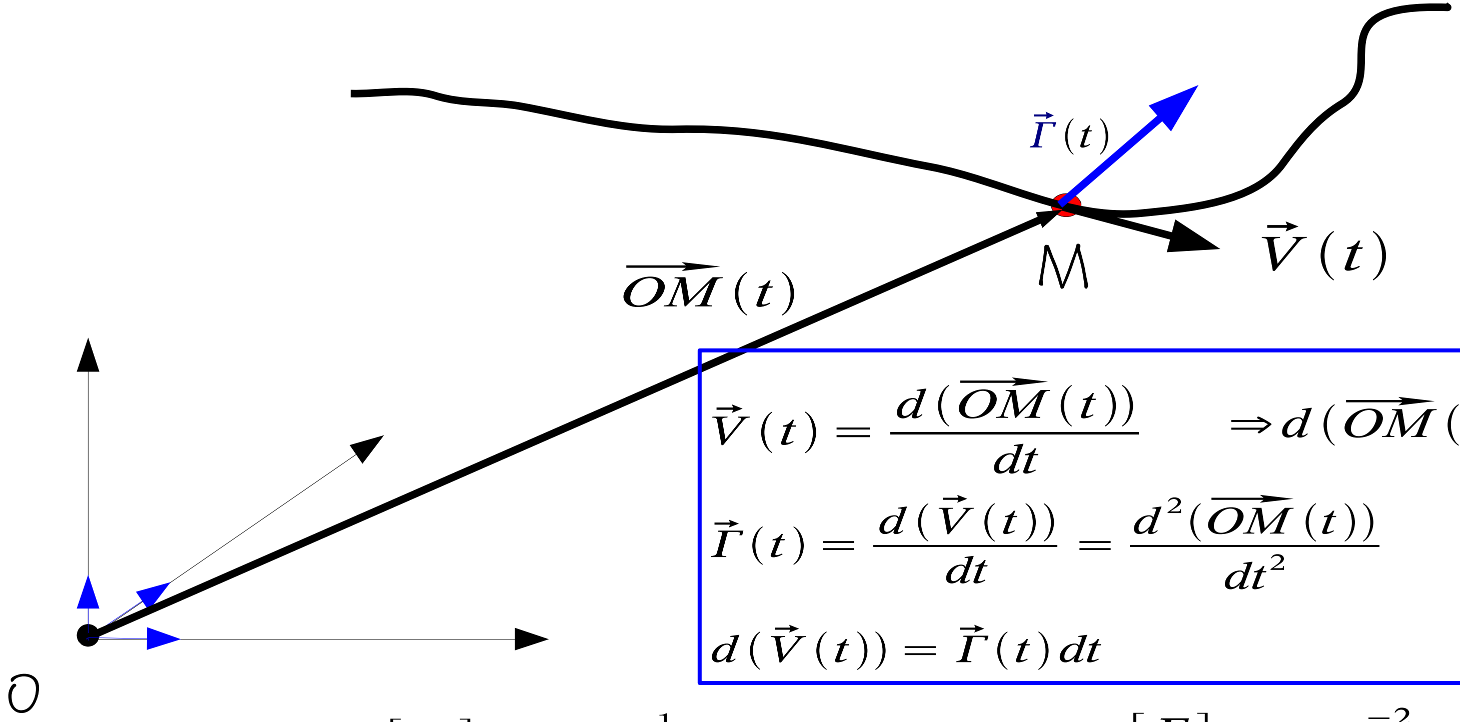
$$\boxed{\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t)\wedge\vec{u}(t)}$$

Rappel : $\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B}$

$C = \sin(\alpha)\,A\,B$

C orthogonal à A et B , sens défini par règle du tire-bouchon

Position, vitesse et accélération



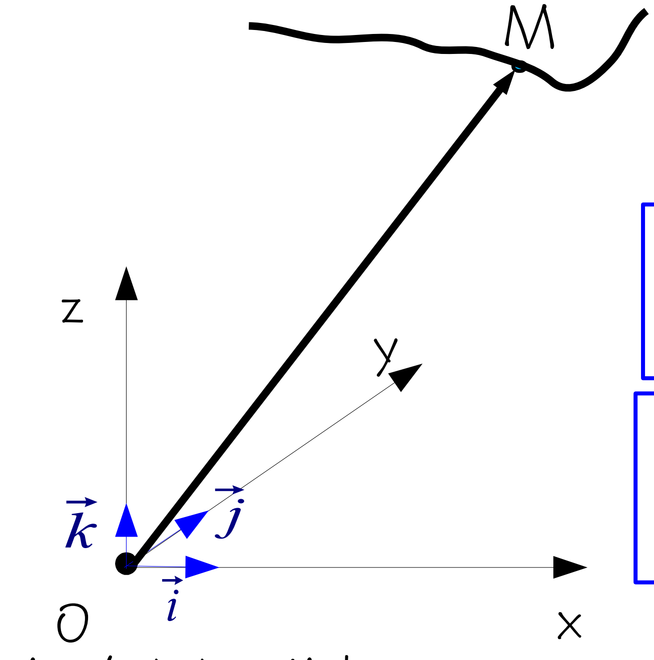
$$\vec{V}(t) = \frac{d(\overrightarrow{OM}(t))}{dt} \qquad \Rightarrow d(\overrightarrow{OM}(t)) = \vec{V}(t)\,dt$$

$$\vec{\Gamma}(t) = \frac{d(\vec{V}(t))}{dt} = \frac{d^2(\overrightarrow{OM}(t))}{dt^2}$$

$$d(\vec{V}(t)) = \vec{\Gamma}(t)\,dt$$

$$[V] = \mathrm{m\,s^{-1}} \qquad [\Gamma] = \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Coordonnées cartésiennes



$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}}$$

Les vecteurs de base ne varient pas !

$$d\,\vec{i} = d\,\vec{j} = d\,\vec{k} = \mathbf{0}$$

$$d(\overrightarrow{OM}(t)) = dx(t)\,\vec{i} + dy(t)\,\vec{j} + dz(t)\,\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V}(t) &= \frac{dx(t)}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\,\vec{k}\\ &= V_x(t)\,\vec{i} + V_y(t)\,\vec{j} + V_z(t)\,\vec{k}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\Gamma}(t) &= \frac{dV_x(t)}{dt}\,\vec{i} + \frac{dV_y(t)}{dt}\,\vec{j} + \frac{dV_z(t)}{dt}\,\vec{k}\\ &= \Gamma_x(t)\,\vec{i} + \Gamma_y(t)\,\vec{j} + \Gamma_z(t)\,\vec{k}\end{aligned}}$$

$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2}\,\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\,\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\,\vec{k}$$

Coordonnées cylindriques

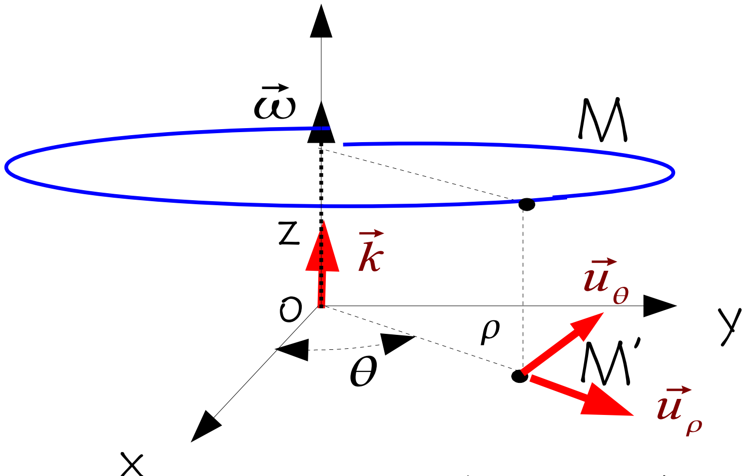
Utilisées si rotation autour d'un axe ici (o,z)

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t)\,\vec{u}_\rho + z(t)\,\vec{k}}$$

$\vec{u}_\rho$ tourne autour de (o,z) avec le vecteur de rotation : $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\,\vec{k} = \dfrac{d\theta(t)}{dt}\,\vec{k}$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \vec{\omega}(t)\wedge\vec{u}_\rho = \frac{d\theta(t)}{dt}\,\vec{k}\wedge\vec{u}_\rho = \frac{d\theta(t)}{dt}\,\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta(t)}{dt}\,\vec{u}_\rho}$$



oxyz fixe / référentiel

ρ	distance à l'axe	$[0,+\infty[$
θ	azimut	$[0, 2\pi]$
z	hauteur	$]-\infty,\infty[$

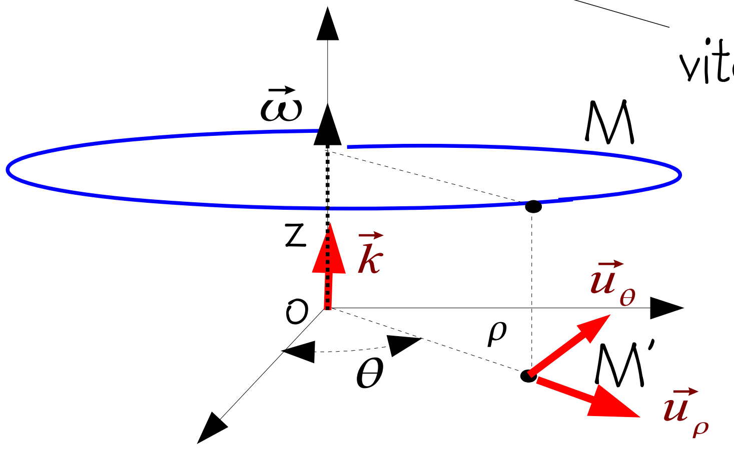
Coordonnées cylindriques, suite ...

$$\vec{V}(t) = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{d(\rho(t)\vec{u}_\rho + z(t)\vec{k})}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{u}_\rho + \rho(t)\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

$$= \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{u}_\rho + \rho(t)\omega(t)\vec{u}_\theta + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = V_\rho\vec{u}_\rho + V_\theta\vec{u}_\theta + V_z\vec{k}$$

vitesse orthoradiale

vitesse radiale



oxyz fixe / référentiel

$$\vec{\Gamma}(t) = \frac{d^2\rho(t)}{dt^2}\vec{u}_\rho + \frac{d\rho(t)}{dt}\frac{d(\vec{u}_\rho)}{dt} + \frac{d\rho(t)}{dt}\omega(t)\vec{u}_\theta$$

$$+\rho(t)\frac{d\omega(t)}{dt}\vec{u}_\theta + \rho(t)\omega(t)\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{\Gamma}(t) = \frac{d^2\rho(t)}{dt^2}\vec{u}_\rho + \frac{d\rho(t)}{dt}\omega(t)\vec{u}_\theta + \frac{d\rho(t)}{dt}\omega(t)\vec{u}_\theta$$

$$+\rho(t)\frac{d\omega(t)}{dt}\vec{u}_\theta - \rho(t)\omega(t)\omega(t)\vec{u}_\rho + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

Coordonnées cylindriques, suite ...

$$\vec{\Gamma}(t) = \left[\frac{d^2\rho(t)}{dt^2} - \rho(t)\,(\omega(t))^2\right]\vec{u}_\rho + \left[2\,\frac{d\rho(t)}{dt}\,\omega(t) + \rho(t)\,\frac{d\omega(t)}{dt}\right]\vec{u}_\theta + \frac{d^2 z(t)}{dt^2}\,\vec{k}$$

accélération centripète

accélération de Coriolis

Coordonnées polaires (mvt plan)

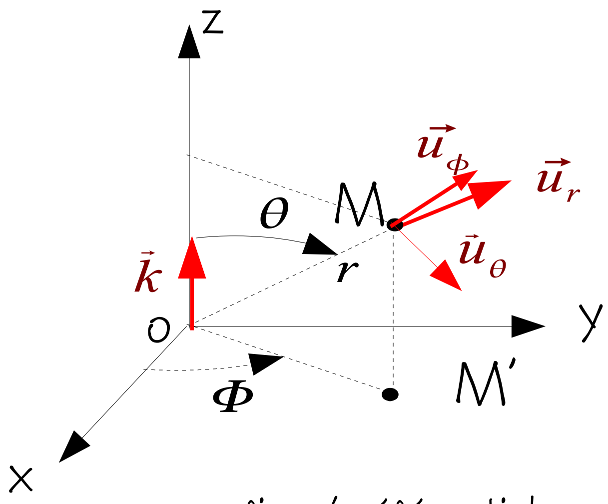
Mouvement plan $\Rightarrow z = cte \Rightarrow \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d^2 z}{dt^2} = 0$

Si de plus $\rho = cte = \rho_0$ et $\omega = cte = \omega_0 \Rightarrow$ mvt circulaire uniforme

$$\vec{V}(t) = \rho_0\,\omega_0\,\vec{u}_\theta \qquad \vec{\Gamma}(t) = -\rho_0\,\omega_0^2\,\vec{u}_\rho$$

Coordonnées sphériques

Corps en rotation autour d'un point



oxyz fixe / référentiel

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\,\vec{u}_r}$$

r	rayon , distance à l'origine	$[\ 0, +\infty\ [$
θ	angle polaire	$[0\,,\pi]$
Φ	angle azimutal	$[0\,,2\pi]$

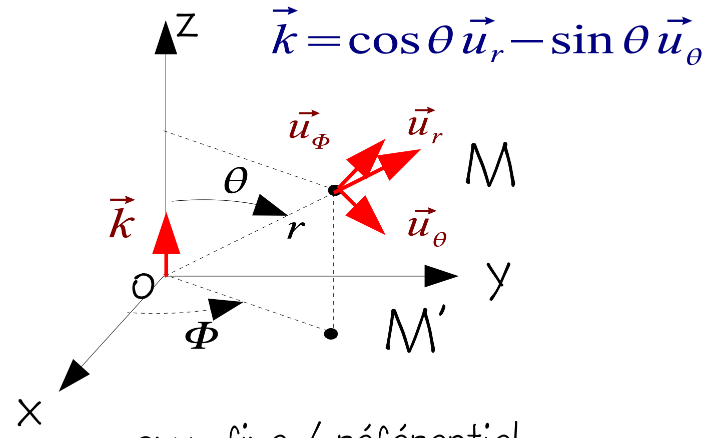
$\vec{u}_\Phi \perp$ à $\vec{u}_r$ et $\vec{k}$

$\vec{u}_\theta \perp$ à $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\Phi$

Coordonnées sphériques

θ est modifié par une rotation autour de $\vec{u}_\Phi$

Φ est modifié par une rotation autour de $\vec{k}$



oxyz fixe / référentiel

Le vecteur rotation total est donné par :

$$\vec{\omega}(t)=\frac{d\,\theta(t)}{dt}\vec{u}_\Phi+\frac{d\,\Phi(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\frac{d(\vec{u}_r)}{dt}=\vec{\omega}(t)\wedge\vec{u}_r=\left(\frac{d\,\theta(t)}{dt}\,\vec{u}_\Phi+\frac{d\,\Phi(t)}{dt}\,\vec{k}\right)\wedge\vec{u}_r=\frac{d\,\theta(t)}{dt}\,\vec{u}_\theta+\frac{d\,\Phi(t)}{dt}\vec{k}\wedge\vec{u}_r$$

$$=\frac{d\,\theta(t)}{dt}\,\vec{u}_\theta+\frac{d\,\Phi(t)}{dt}\,\sin\theta(t)\,\vec{u}_\Phi$$

$$\frac{d(\vec{u}_\theta)}{dt}=\vec{\omega}(t)\wedge\vec{u}_\theta=-\frac{d\,\theta(t)}{dt}\,\vec{u}_r+\frac{d\,\Phi(t)}{dt}\,\cos\theta(t)\,\vec{u}_\Phi$$

$$\frac{d(\vec{u}_\Phi)}{dt}=\vec{\omega}(t)\wedge\vec{u}_\Phi=\frac{d\,\Phi(t)}{dt}\,\vec{k}\wedge\vec{u}_\Phi=-\frac{d\,\Phi(t)}{dt}\cos\theta(t)\,\vec{u}_\theta-\frac{d\,\Phi(t)}{dt}\,\sin\theta\,\vec{u}_r$$

Coordonnées sphériques

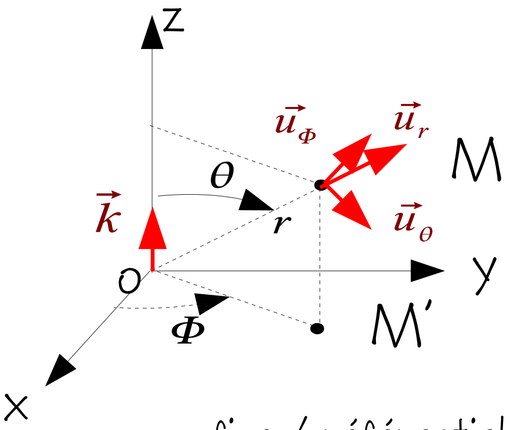
$$\vec{V}(t) = \frac{d\,r(t)}{dt}\vec{u}_r + r(t)(\,\vec{\omega}(t)\wedge\vec{u}_r)$$

$$= \frac{d\,r(t)}{dt}\vec{u}_r + r(t)([\frac{d\,\theta(t)}{dt}\vec{u}_\Phi + \frac{d\,\Phi(t)}{dt}\vec{k}]\wedge\vec{u}_r)$$

$$= \frac{d\,r(t)}{dt}\vec{u}_r + r(t)\frac{d\,\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta + r(t)\,\sin(\theta(t))\,\frac{d\,\Phi(t)}{dt}\vec{u}_\Phi$$

$$= \frac{d\,r(t)}{dt}\vec{u}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta + r(t)\,\sin(\theta(t))\,\dot{\Phi}(t)\vec{u}_\Phi$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{d\,\theta(t)}{dt} \qquad \dot{\Phi}(t) = \frac{d\,\Phi(t)}{dt}$$



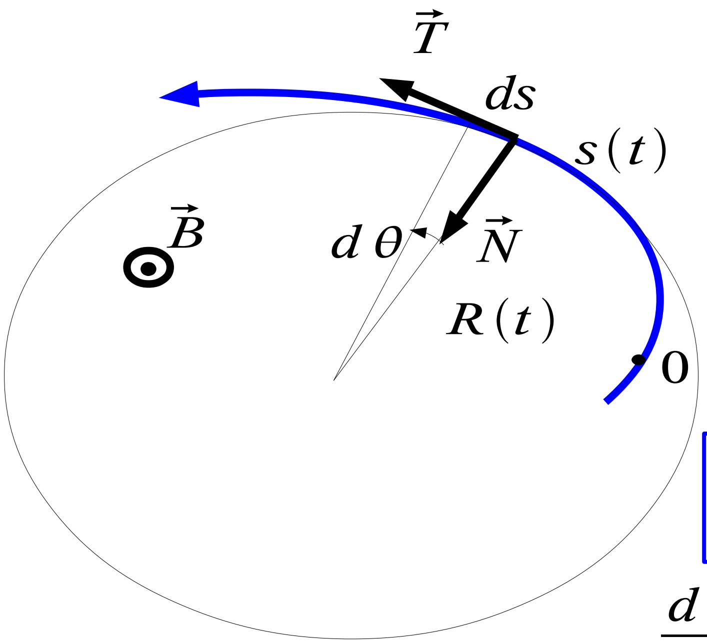
oxyz fixe / référentiel

$$\vec{\Gamma}(t) = (\,\frac{d^2 r(t)}{dt^2} - r(t)\,(\dot{\theta}(t))^2 - r(t)\,\sin^2(\theta(t))\,(\dot{\Phi}(t))^2\,)\,\vec{u}_r +$$

$$(2\frac{d\,r(t)}{dt}\,\dot{\theta}(t) + r(t)\frac{d\,\dot{\theta}(t)}{dt} - r(t)\sin(\theta(t))\cos(\theta(t))(\dot{\Phi}(t))^2)\,\vec{u}_\theta +$$

$$(2\frac{d\,r(t)}{dt}\sin(\theta(t))\dot{\Phi}(t) + 2r(t)\cos(\theta(t))\dot{\theta}(t)\dot{\Phi}(t) + r(t)\sin(\theta(t))\frac{d\,\dot{\Phi}(t)}{dt}\,)\vec{u}_\Phi$$

Coordonnées curvilignes : de Serret-Frenet



À un instant t, la trajectoire (qui n'est pas plane) est contenue dans un plan, ici celui de la feuille . Un cercle tangente la trajectoire à l'instant t.

$\vec{T}$ unitaire et tangent à la trajectoire dirigé dans le sens du mouvement, donc dans le plan de la feuille

$\vec{N}$ unitaire et normal à $\vec{T}$ dirigé vers le centre du cercle tangent (dans le plan de la feuille)

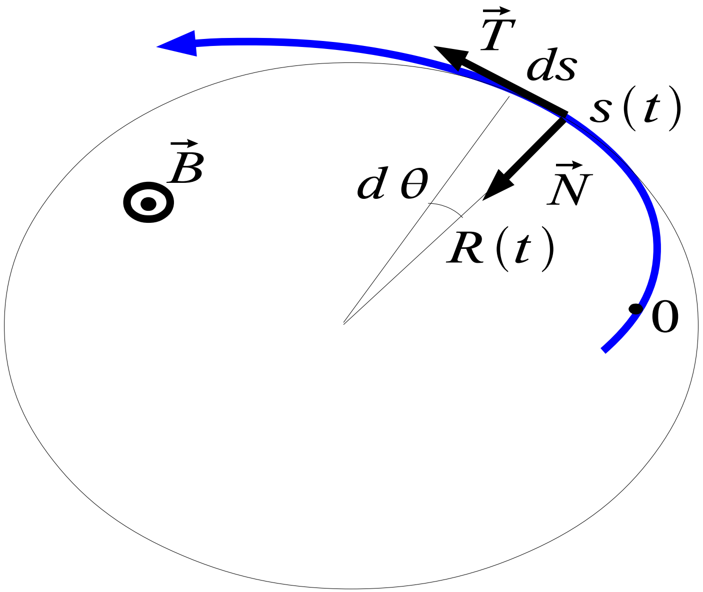
$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{N}$$

$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ vecteur unitaire binormal

$s(t)$ abscisse curviligne le long de la trajectoire

$$d\,s(t) = R(t)\,d\theta(t)$$

Coordonnées curvilignes : de Serret-Frenet



$$d\vec{T} = d\theta\,\vec{N} = \frac{ds}{R(t)}\vec{N}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R(t)}$$

$$\vec{V}\,dt = ds\,\vec{T} \qquad \boxed{\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = V\,\vec{T}}$$

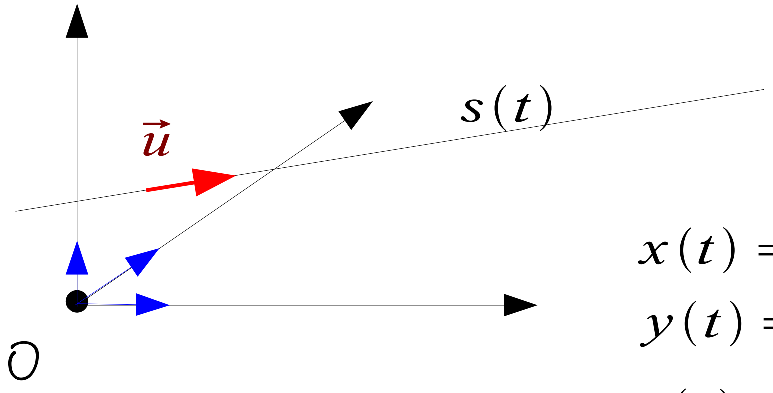
$$\vec{\Gamma}(t) = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$= \boxed{\frac{dV}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{R(t)}\vec{N} = \vec{\Gamma}(t)}$$

$$\boxed{V(t)\,dt = ds \;\Rightarrow\; s(t) = \int_{t_0}^{t} V(t)\,dt}$$

vrai dans tous les systèmes de coordonnées

Trajectoires



équation paramétrique en fonction de t

droite , mouvement rectiligne

$$x(t) = u_x s(t) + x_0$$
$$y(t) = u_y s(t) + y_0$$
$$z(t) = u_z s(t) + z_0$$

avec

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$$

$s(t)$ fonction arbitraire de t

mvt uniforme si $s(t) = a\,t$

mouvement circulaire de rayon r

$$x(t) = r\cos\left(\frac{s(t)}{r} + \Phi_0\right) + x_0$$
$$y(t) = r\sin\left(\frac{s(t)}{r} + \Phi_0\right) + y_0$$
$$z(t) = z_0$$

$s(t)$ fonction arbitraire de t

mvt uniforme si $s(t) = \omega\, r\, t$

Trajectoires

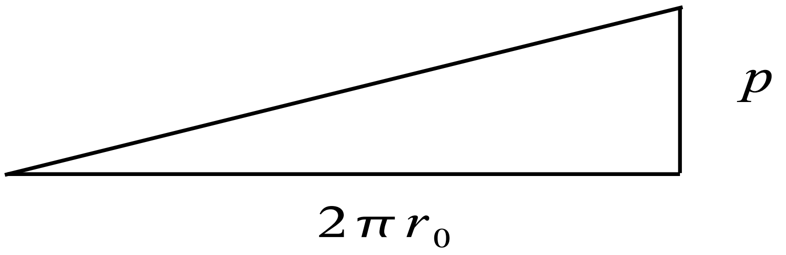
mouvement hélicoïdal de rayon r_o et de pas p

$$r(t) = r_0$$

$$\theta(t) = 2\pi \frac{s(t)}{\sqrt{(2\pi r_0)^2 + p^2}} + \theta_0$$

$$z(t) = p \frac{s(t)}{\sqrt{(2\pi r_0)^2 + p^2}} + z_0$$

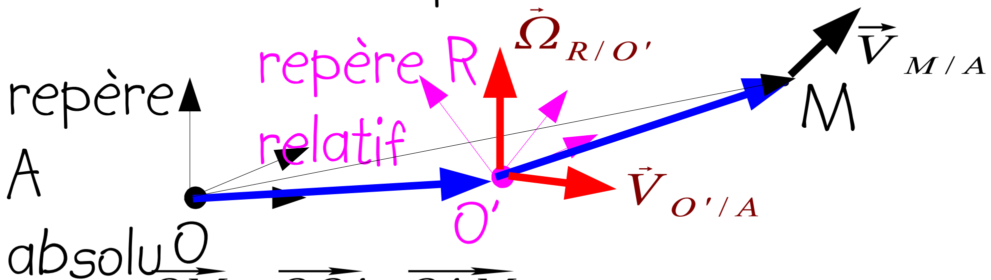
$s(t)$ fonction arbitraire de t



Trajectoire dépliée sur un plan

Mouvement absolu et Mouvement relatif

décrits dans des repères absolu et relatif .



À un instant t, R peut avoir un mouvement de translation par rapport à A et tourner sur lui-même, c-à-d autour de O'

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{V}_{M/A} = \frac{d(\overrightarrow{OO'})}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{O'M})}{dt} = \vec{V}_{O'/A} + \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega}_{R/O'} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{\Gamma}_{M/A} = \frac{d(\vec{V}_{M/A})}{dt} = \vec{\Gamma}_{O'/A} + \frac{d(\vec{V}_{M/R})}{dt} + \frac{d(\vec{\Omega}_{R/O'})}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R/O'} \wedge \frac{d(\overrightarrow{O'M})}{dt}$$

$$= \vec{\Gamma}_{O'/A} + \vec{\Gamma}_{M/R} + \vec{\Omega}_{R/O'} \wedge \vec{V}_{M/R} + \frac{d(\vec{\Omega}_{R/O'})}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R/O'} \wedge \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega}_{R/O'} \wedge (\vec{\Omega}_{R/O'} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

$$= \vec{\Gamma}_{O'/A} + \vec{\Gamma}_{M/R} + \frac{d(\vec{\Omega}_{R/O'})}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + 2\vec{\Omega}_{R/O'} \wedge \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega}_{R/O'} \wedge (\vec{\Omega}_{R/O'} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

si $\vec{\Omega}_{R/O'} = 0$ (pas de rotation de R) $\vec{V}_{M/A} = \vec{V}_{O'/A} + \vec{V}_{M/R}$ et $\vec{\Gamma}_{M/A} = \vec{\Gamma}_{O'/A} + \vec{\Gamma}_{M/R}$

Récapitulatif

Vecteur : $\vec{U}(U_x, U_y, U_z)$ ou $\vec{U} = U\vec{u}$ avec $\|\vec{u}\| = 1$

Différentielle d'un vecteur : $d\vec{U} = \vec{U}(t+dt) - \vec{U}(t)$

Dérivée d'un vecteur : $\dfrac{d\vec{U}}{dt} = \dfrac{\vec{U}(t+dt) - \vec{U}(t)}{dt}$

Dérivée et différentielle d'un vecteur unitaire :

$$\|\vec{u}(t)\| = 1 \qquad d\vec{u}(t) \perp \vec{u}(t) \qquad \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{u}(t) \qquad \|\vec{\omega}(t)\| = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

vecteurs position, vitesse, accélération :

$$\overrightarrow{OM}(t) \qquad \vec{V}(t) = \frac{d(\overrightarrow{OM}(t))}{dt} \qquad \vec{\Gamma}(t) = \frac{d(\vec{V}(t))}{dt} = \frac{d^2(\overrightarrow{OM}(t))}{dt^2}$$

Récapitulatif

coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

$$\vec{V}(t)=\frac{d\,x(t)}{dt}\vec{i}+\frac{d\,y(t)}{dt}\vec{j}+\frac{d\,z(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{\Gamma}(t)=\frac{d\,V_x(t)}{dt}\vec{i}+\frac{d\,V_y(t)}{dt}\vec{j}+\frac{d\,V_z(t)}{dt}\vec{k}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

coordonnées cylindriques : (savoir retrouver)

$$\overrightarrow{OM}(t)=\rho(t)\vec{u}_\rho(t)+z(t)\vec{k} \qquad \frac{d\,\vec{u}_\rho}{dt}=\frac{d\,\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta \qquad \frac{d\,\vec{u}_\theta}{dt}=-\frac{d\,\theta(t)}{dt}\vec{u}_\rho$$

$$\vec{V}(t)=\frac{d\,\rho(t)}{dt}\vec{u}_\rho+\rho(t)\,\omega(t)\,\vec{u}_\theta+\frac{d\,z(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{\Gamma}(t)=\left(\frac{d^2\rho(t)}{dt^2}-\rho(t)(\omega(t))^2\right)\vec{u}_\rho+\left(2\frac{d\,\rho(t)}{dt}\omega(t)+\rho(t)\frac{d\,\omega(t)}{dt}\right)\vec{u}_\theta+\frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

Récapitulatif

coordonnées polaires : (dans un plan)

$$\overrightarrow{OM}(t)=\rho(t)\vec{u}_\rho(t)$$

coordonnées cylindriques avec : $z=cte \qquad \frac{dz}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}=0$

repère de Serret-Frénet :

$$\vec{V}(t)=V(t)\vec{T}(t)=\frac{ds(t)}{dt}\vec{T}(t)$$

$$\vec{\Gamma}(t)=\frac{dV(t)}{dt}\vec{T}(t)+\frac{V^2(t)}{R(t)}\vec{N}(t)$$

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}V(t)dt$$