

# Cinématique, taux de désintégrations et sections efficaces de réactions

## Table des matières

1 Transformation de Lorentz :.....	2
2 Rapidité :.....	2
2.1 transformation de Lorentz selon $(0,z)$ en fonction de la rapidité :.....	3
2.2 Pseudorapidité : .....	3
3 Centre de masse :.....	3
3.1 Énergie totale dans le centre de masse :.....	3
3.2 Quantité de mouvement dans le centre de masse pour une expérience sur cible fixe :.....	4
4 Désintégrations de particules :.....	4
4.1 Désintégrations en deux corps :.....	5
4.2 Désintégrations en trois corps et diagrammes de Dalitz :.....	5
5 Section efficace :.....	6
5.1 Réactions à deux particules dans la voie de sortie et variables de Mandelstam : .....	9
5.2 Réactions inclusives :.....	11
5.3 Canaux croisés :.....	11
6 Pour en savoir plus :.....	13
7 Exercices :.....	14
7.1 Exercice 3 : .....	14
7.2 Exercice 4 : .....	14
7.3 Exercice 5 : .....	14
7.4 Exercice 6 : .....	14

# 1 Transformation de Lorentz :

Le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement  $P = (E, \vec{p})$  d'une particule de masse  $m$  se déplaçant à une vitesse  $\vec{\beta} = \vec{p}/E$  (dans le système d'unités naturelles  $\hbar=c=1$ ) par rapport à un référentiel galiléen  $R$ , examiné dans un deuxième référentiel  $R_f$  se mouvant avec la vitesse relative constante  $\vec{\beta}_f$  par rapport à  $R$ , est obtenu en appliquant la transformation de Lorentz suivante :

$$\begin{pmatrix} E^* \\ p_{//}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_f & -\gamma_f \beta_f \\ -\gamma_f \beta_f & \gamma_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{//} \end{pmatrix}, \quad p_{\perp}^* = p_{\perp}, \text{ où } p_{//} \text{ et } p_{\perp} \text{ sont les composantes parallèle et orthogonale à } \vec{\beta}_f \text{ de } \vec{p}, \text{ et } \gamma_f = (1 - \beta_f^2)^{-1/2}.$$

Tout autre quadrivecteur se transforme de la même manière. De plus le produit scalaire de deux quadrivecteurs est un invariant de Lorentz ce qui a pour conséquences que :

- $P \cdot P = E^2 - p^2 = m^2 = E^{*2} - p^{*2} = cte$ , la masse d'une particule est un invariant relativiste ;
- le produit scalaire de deux quadrivecteurs énergie-quantité de mouvement de deux particules  $P_1 \cdot P_2 = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = cte$ .

Si  $R_f$  coïncide avec le référentiel au repos d'une particule, dans lequel le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement se réduit à  $P^* = (m, \vec{0})$ , ce qui signifie que  $\vec{\beta}_f = \vec{\beta}$ , on obtient alors dans  $R$  :

$$\begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta \\ \gamma \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E = \gamma m ; \quad \vec{p} = \gamma m \vec{\beta} = E \vec{\beta}.$$

# 2 Rapidité :

Dans un repère cartésien lié au référentiel  $R$ , on choisit de placer l'axe  $(0,z)$  dans une direction particulière, qui s'avère très souvent être la direction d'un faisceau de particules. La masse transverse  $m_T$  d'une particule de masse  $m$  est définie à partir de la projection orthogonale à  $(0,z)$  de sa quantité de mouvement  $\vec{p}$  par la relation suivante :

$$m_T^2 = m^2 + p_T^2 = m^2 + p_x^2 + p_y^2, \text{ ou encore : } m^2 = m_T^2 - p_z^2.$$

On peut montrer que :

$$E^2 - p^2 = E^2 - p_z^2 - p_T^2 = m^2 = m_T^2 - p_T^2 \Rightarrow m_T^2 = E^2 - p_z^2.$$

En utilisant la trigonométrie hyperbolique ( $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ), on peut alors exprimer les coordonnées du quadrivecteur  $P = (E, \vec{p})$  de la façon suivante :

$$P = (E = m_T \cosh \xi, p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, p_z = m_T \sinh \xi),$$

où :  $\xi$ , la rapidité, est une grandeur donnée par :

$$\xi = \tanh^{-1}(\beta_z) = \tanh^{-1}(p_z/E) = \ln\left(\frac{E + p_z}{m_T}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{E + p_z}{E - p_z}\right).$$

C'est une grandeur sans unité qui varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

## 2.1 transformation de Lorentz selon (0,z) en fonction de la rapidité :

Les paramètres de la transformation de Lorentz qui permet de calculer les coordonnées de P dans le référentiel  $R_f$  se mouvant à la vitesse constante  $\vec{\beta}_f = (0, 0, \beta_f)$  par rapport à R, sont :

$$\gamma_f = (1 - \beta_f^2)^{-1/2} = \left( \frac{\cosh^2 \xi_f - \sinh^2 \xi_f}{\cosh^2 \xi_f} \right)^{-1/2} = \cosh \xi_f, \quad \gamma_f \beta_f = \cosh \xi_f \tanh \xi_f = \sinh \xi_f, \text{ ce qui conduit à :}$$

$$\begin{pmatrix} E^* \\ p_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi_f & -\sinh \xi_f \\ -\sinh \xi_f & \cosh \xi_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_z \end{pmatrix}, \quad p_\perp^* = p_\perp.$$

La rapidité est une grandeur additive selon (0,z). Une particule animée d'une vitesse  $\vec{\beta}$ , voit la composante longitudinale de sa vitesse se transformer dans le repère  $R_f$  selon la loi relativiste :

$$\beta_z^* = \frac{\beta_z - \beta_f}{1 - \beta_z \beta_f}, \text{ soit } \tanh \xi^* = \frac{\tanh \xi - \tanh \xi_f}{1 - \tanh \xi \tanh \xi_f} = \tanh(\xi - \xi_f) \Rightarrow \xi^* = \xi - \xi_f.$$

On retrouve alors le caractère additif de la loi de composition des vitesses de la mécanique classique newtonienne (selon l'axe (0,z)), d'où l'origine du nom «rapidité».

On peut noter que  $\xi_f$  étant constant, on a :  $d\xi^* = d\xi$ .

## 2.2 Pseudorapidité :

Lorsqu'une particule se situe dans un régime de mouvement dit ultra-relativiste, sa masse devient négligeable devant sa quantité de mouvement  $p$ . On obtient alors :  $E \approx p$  et  $m_T = E_T \approx p_T$ , ce qui implique que :

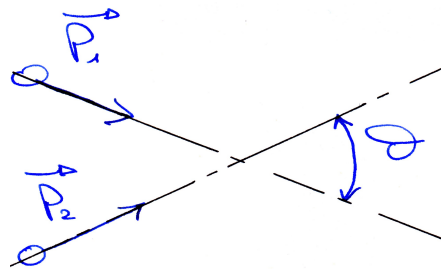
$$\xi = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \approx \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p + p \cos \theta}{p - p \cos \theta} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\cos^2 \theta / 2}{\sin^2 \theta / 2} \right) = -\ln(\tan(\theta/2)) = \eta, \text{ que l'on appelle la}$$

pseudorapidité. La pseudorapidité d'une particule est directement reliée à son angle polaire  $\theta$  et dans la limite ultra-relativiste, elle se confond avec sa rapidité.

On peut également montrer que :  $\sinh \eta = \cot \theta$ ,  $\cosh \eta = 1/\sin \theta$  et  $\tanh \eta = \cos \theta$ .

## 3 Centre de masse :

### 3.1 Énergie totale dans le centre de masse :



Dans la collision de deux particules décrite sur la figure précédente, l'énergie totale disponible dans le centre de masse - c'est-à-dire là où se juge le seuil d'une réaction - est donnée par :

$$E_{cm} = \sqrt{(P_1 + P_2)^2} = \sqrt{(P_{1cm} + P_{2cm})^2} = \sqrt{(E_{1cm} + E_{2cm})^2} = (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta))^{1/2}.$$

Si  $m_2$  est au repos (expérience sur cible fixe), l'expression précédente se réduit à :

$$E_{cm} = (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2)^{1/2}.$$

De laquelle on peut tirer que :  $E_{cm} dE_{cm} = m_2 dE_1 = m_2 \beta_1 dP_1$ .

Par contre si l'on travaille sur un collisionneur, c'est-à-dire si  $\cos \theta = -1$ , on a alors :

$$E_{cm} = (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 (1 + \beta_1 \beta_2))^{1/2};$$

et si celui-ci est ultra-relativiste ,

$$E_{cm} = 2\sqrt{E_1 E_2}.$$

### 3.2 Quantité de mouvement dans le centre de masse pour une expérience sur cible fixe :

La masse  $m_2$  étant au repos, la vitesse du centre de masse est donnée par :

$$\vec{\beta}_{cm} = \frac{\vec{P}_1}{E_1 + m_2}, \text{ à l'aide de laquelle on peut déduire que : } \gamma_{cm} = (1 - \beta_{cm}^2)^{-1/2} = \frac{(E_1 + m_2)}{E_{cm}}.$$

La norme de la quantité de mouvement dans le centre de masse de  $m_1$  et  $m_2$  et alors donnée par :

$$p_{cm} = p_1 \frac{m_2}{E_{cm}} \text{ (qui est une formule équivalente à ce qu'on obtient en mécanique classique, mais dans laquelle la somme des masses est remplacée par l'énergie totale disponible dans le centre de masse).}$$

## 4 Désintégrations de particules :

Le taux de désintégration partiel d'une particule de masse  $m$  en  $n$  corps, exprimé dans son référentiel au repos, est donné par :

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2m} |M|^2 d\Phi_n(P; P_1, \dots, P_n), \text{ où :}$$

- $M$  est l'élément de matrice invariant de la désintégration considérée ;
- $d\Phi_n(P; P_1, \dots, P_n)$  est l'élément de l'espace de phase à  $3n$  dimensions qui est donné par :

$$d\Phi_n(P; P_1, \dots, P_n) = \delta^4(P - \sum_{i=1}^n P_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \text{ où } P = (m, 0) \text{ et } (P_i = (E_i, \vec{p}_i); i=1, n)$$

sont respectivement les quadrivecteurs énergie-quantité de mouvement de  $m$  et des  $n$  produits de masses  $m_i$  de la désintégration.

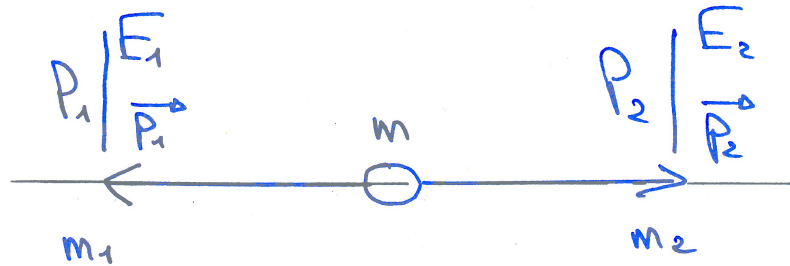
Le temps de vie moyen d'une particule s'obtient en intégrant pour chacune des voies son taux de désintégration partiel sur le domaine ouvert de l'espace des phases, en sommant les  $k$  voies possibles et en inversant le tout :

$$\tau = 1/\Gamma \text{ avec } \Gamma = \sum_{j=1}^k \Gamma_j = \sum_{j=1}^k \int d\Gamma_j.$$

Pour une particule de masse  $m$  ayant un temps propre moyen de vie  $\tau$  (c'est-à-dire mesuré dans un référentiel lié à cette particule) et possédant un quadrivecteur énergie-quantité de mouvement  $P(E, \vec{p})$ , la probabilité que celle-ci vive un temps supérieur ou égal à  $t_0$  avant de se désintégrer est :

$$P(t_0) = e^{-\frac{t_0}{\tau}} = e^{-\frac{x_0}{\beta \tau}} = e^{-\frac{x_0}{p \tau}} = P(x_0) \quad \text{ce qui est également la probabilité qu'elle parcourt une distance } x_0 = \beta t_0 \text{ avant de décroître.}$$

### 4.1 Désintégrations en deux corps :



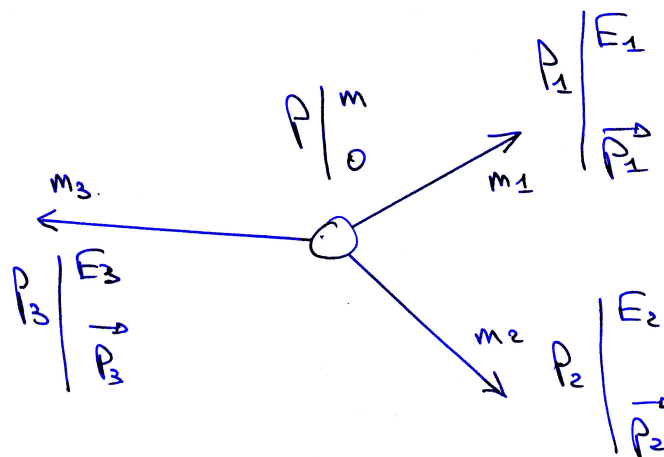
En utilisant les notations du schéma de désintégration donné ci-dessus dans le référentiel au repos de la particule de masse  $m$ , on obtient :

$$E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m}, \quad E_2 = \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m} \quad \text{et} \quad p_1 = p_2 = \frac{((m^2 - (m_1 + m_2)^2)(m^2 - (m_1 - m_2)^2))^{1/2}}{2m}.$$

Le taux de désintégration différentiel se réduit alors à :  $d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} |M|^2 \frac{p_1}{m^2} d\Omega_1$ , expression dans laquelle  $d\Omega_1$  est l'élément d'angle solide de la particule 1.

**Exercice 1 :** Démontrer les relations précédentes ; astuce : utiliser la relation  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$  pour obtenir l'expression simplifiée du taux de désintégration .

### 4.2 Désintégrations en trois corps et diagrammes de Dalitz :



La figure ci-dessus définit les notations employées pour l'étude d'une désintégration à trois corps d'une particule dans son référentiel propre. Si de plus on note :  $P(m, 0) = P_1 + P_2 + P_3$ ,  $P_{ij} = P_i + P_j$  (le quadrivecteur somme de i et j), et  $m_{ij}^2 = P_{ij}^2$ , on peut montrer que :

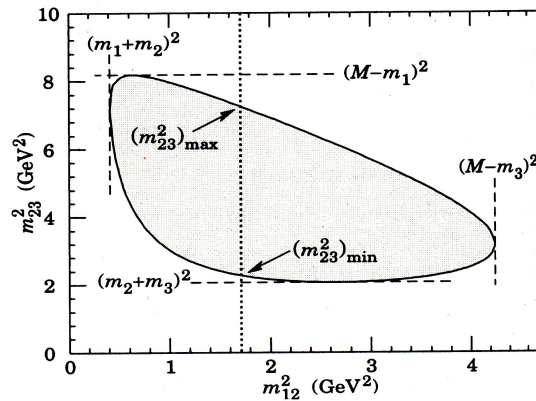
$$\text{pour } k \neq i, j, m_{ij}^2 = (P - P_k)^2 = m^2 + m_k^2 - 2mE_k, \quad m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = m^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \text{ d'où :}$$

$$dm_{ij}^2 = -2m dE_k$$

Si la particule qui décroît est un scalaire (s=0) ou si on prend la moyenne sur ses états de spin pour calculer son taux différentiel de désintégration (la particule incidente est rarement polarisée), on obtient :

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8m} |\overline{M}|^2 dE_1 dE_3 = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32m^3} |\overline{M}|^2 dm_{12}^2 dm_{23}^2 .$$

Le diagramme de Dalitz (voir figure ci-dessous) représente le domaine cinématiquement permis dans le plan  $(m_{12}^2, m_{23}^2)$  pour la désintégration à 3 corps considérée.



Dans la figure ci-dessus, les valeurs minimale et maximale de  $m_{23}^2$  pour une valeur de  $m_{12}^2$  donnée sont :

$$(m_{23}^2)_{max} = (E_2^* + E_3^*)^2 - (\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} - \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2})^2 \quad \text{et} \quad (m_{23}^2)_{min} = (E_2^* + E_3^*)^2 - (\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} + \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2})^2$$

$$\text{avec : } E_2^* = (m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2) / 2m_{12} \quad \text{et} \quad E_3^* = (m^2 - m_{12}^2 - m_3^2) / 2m_{12} .$$

Si  $|\overline{M}|^2$  est constant, alors le domaine permis du diagramme de Dalitz est uniformément peuplé. Inversement, si l'on observe que le diagramme de Dalitz d'une désintégration est inhomogènement rempli, cela renseigne directement sur la variation de  $|\overline{M}|^2$  dans le domaine cinématique ouvert.

## 5 Section efficace :

La section efficace est une grandeur physique qui a la dimension d'une surface. Elle est reliée à la probabilité d'interaction de deux particules selon une réaction donnée. Géométriquement, elle correspond au disque de même aire, disposé perpendiculairement à la direction de propagation du projectile et centré sur la particule cible lorsque celle-ci est observée à l'arrêt. En d'autres termes, elle représente la surface apparente de la cible pour un projectile donné.

Par convention, la section efficace de réaction de deux particules est définie dans un référentiel où l'une d'entre-elles est au repos. Pour une particule cible et un projectile donnés, elle ne dépend donc que de leur vitesse relative, laquelle est un invariant de Lorentz. Il en découle que la section efficace définie de la sorte est un invariant relativiste.

Dans le repère du laboratoire, considérons deux particules 1 (projectile) et 2 (cible) qui interagissent avec les vitesses  $\vec{\beta}_1$  et  $\vec{\beta}_2$ , respectivement. Dans le repère fixe par rapport à 2, la cible est contenue dans une boîte cylindrique de volume V et de section transverse au mouvement du projectile S. La probabilité de

réaction de 1 et 2 est alors donnée par :  $p = \frac{\sigma}{S}$  .

Si cette boîte contient maintenant un milieu homogène d'une densité  $n_2$  de particules cible se déplaçant à la vitesse  $\vec{\beta}_2$  dans le référentiel du laboratoire, la probabilité d'interaction d'un projectile avec cette boîte devient alors :  $P = \frac{\sigma}{S} n_2^{(2)} V$ , où  $n_2^{(2)}$  est la densité de particules cible mesurée dans le référentiel lié à la cible.

Si à la place d'un seul projectile, nous avons à faire avec un faisceau constitué d'un fluide homogène d'une densité  $n_1$  de projectiles animés d'une vitesse  $\vec{\beta}_1$  dans le référentiel du laboratoire, le nombre total de projectiles heurtant la boîte pendant le temps d'interaction  $\Delta t$  sera alors donné par :  $\Phi = n_1^{(2)} \beta_{1/2} S \Delta t$ , où  $\beta_{1/2}$  est la vitesse relative du projectile par rapport à la cible et  $n_1^{(2)}$  est la densité de projectiles mesurée dans le référentiel lié à la cible. Le nombre de réactions sur l'intervalle de temps  $\Delta t$  est alors donné par :  $\Delta N = P \Phi = \sigma n_1^{(2)} n_2^{(2)} \beta_{1/2} V \Delta t$  .

Le produit :  $V \Delta t$  est un invariant relativiste (contraction du volume, dilatation du temps). La vitesse relative de 1 par rapport à 2 est donnée par :

$$(\beta_{1/2})^2 = \frac{(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2)^2 - (\vec{\beta}_1 \wedge \vec{\beta}_2)^2}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2} .$$

Les densités de particules  $n_1^{(2)}$  et  $n_2^{(2)}$  peuvent être calculées par rapport à leurs homologues  $n_1$  et  $n_2$  observées dans le référentiel du laboratoire par :

$$n_2^{(2)} = n_2 \sqrt{1 - \beta_2^2} , \text{ et } n_1^{(2)} = n_1 \sqrt{1 - \beta_1^2} = n_1^{(2)} \sqrt{1 - \beta_{1/2}^2} \text{ soit encore : } n_1^{(2)} = n_1 \frac{\sqrt{1 - \beta_1^2}}{\sqrt{1 - \beta_{1/2}^2}} .$$

En remplaçant toutes les grandeurs mesurées dans le référentiel lié à la cible par leurs valeurs en fonction des grandeurs mesurées dans le référentiel du laboratoire, on aboutit finalement à :

$$\Delta N = P \Phi = \sigma n_1 n_2 \sqrt{(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2)^2 - (\vec{\beta}_1 \wedge \vec{\beta}_2)^2} V \Delta t = \sigma n_1 n_2 \frac{\sqrt{(P_1 P_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} V \Delta t , \text{ où } P_1 \text{ et } P_2, E_1 \text{ et } E_2$$

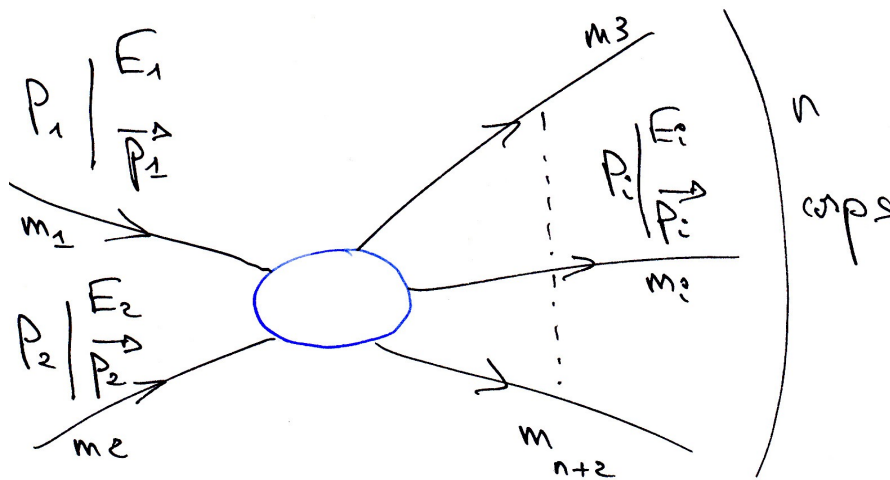
ainsi que  $m_1$  et  $m_2$  sont respectivement les quadrivecteurs énergie-quantité de mouvement, les énergies totales dans le référentiel du laboratoire ainsi que les masses des particules 1 et 2.

Lorsque l'on examine la réaction d'une particule 1 sur une seule particule 2, on peut choisir la dimension des boîtes contenant 1 et 2 de telle sorte que les densités s'expriment par  $n_1 = \frac{1}{V}$  et  $n_2 = \frac{1}{V}$ . On obtient alors :

$$\sigma = \frac{\Delta N}{\Delta t} \frac{V}{\beta_0} , \text{ dans laquelle } \Delta N \text{ est nécessairement plus petit que 1 (une seule réaction possible) et } \beta_0 = \frac{\sqrt{(P_1 P_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} . \frac{\Delta N}{\Delta t} \text{ correspond à la probabilité de réaction par unité de temps (taux de}$$

réaction) que l'on notera par la suite  $\Gamma$ .  $J = \frac{\beta_0}{V}$  est le flux de probabilité de l'état initial. La section efficace se réécrit sous la forme :

$$\sigma = \frac{\Gamma}{J}$$



Examinons la réaction particulière représentée ci-dessus. La section efficace différentielle à deux corps dans la voie d'entrée et n particules dans la voie de sortie s'exprime par :  $d\sigma = \frac{d\Gamma}{J}$ . Le taux différentiel (ou partiel) de réaction est calculable en mécanique quantique dans le formalisme des perturbations dépendant du temps. On obtient alors :

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \frac{|\tilde{T}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_{n+2})|^2}{V^{n+1}} \delta^4(P - \sum_{i=1}^n P_{i+2}) \prod_{i=3}^{n+2} \frac{V d^3 p_i}{(2\pi)^3}, \quad P = P_1 + P_2,$$

dans laquelle, le produit à n dimensions représente le nombre d'états quantiques finals accessibles, la distribution de Dirac à 4 dimensions exprime la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement et  $\tilde{T}$  correspond à l'amplitude de probabilité de transition de la réaction considérée qui est normalisée par le facteur  $V^{n+1}$ . En fonction de ce résultat, la section efficace différentielle se transforme de la façon suivante :

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{\beta_0} |T(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_{n+2})|^2 \delta^4(P - \sum_{i=1}^n P_{i+2}) \prod_{i=3}^{n+2} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3}.$$

Il est commode de rendre invariants de Lorentz, l'élément de volume de l'espace de phase (le produit à n dimensions) ainsi que le module carré de l'amplitude de transition. Il se trouve que le produit  $\prod_{i=3}^{n+2} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$  est un invariant relativiste. Le produit  $2E_1 2E_2 (\prod_{i=3}^{n+2} 2E_i) |T(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_{n+2})|^2$  est également un invariant relativiste. On peut ainsi réécrire la section efficace différentielle sous la forme :

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{(P_1 P_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} 2E_1 2E_2 (\prod_{i=3}^{n+2} 2E_i) |T(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_{n+2})|^2 \delta^4(P - \sum_{i=1}^n P_{i+2}) \prod_{i=3}^{n+2} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}.$$

On définit alors le carré du module de l'élément de matrice invariant (relativiste) par :

$$|M|^2 = 2E_1 2E_2 (\prod_{i=3}^{n+2} 2E_i) |T(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_{n+2})|^2.$$



La section efficace différentielle à deux corps dans la voie d'entrée et n particules dans la voie de sortie s'exprime finalement par :

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |M|^2}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d\Phi_n(P=P_1+P_2; P_3, \dots, P_{n+2}), \text{ où :}$$

- M est l'élément de matrice invariant de la réaction étudiée ;
- $d\Phi_n(P=P_1+P_2; P_3, \dots, P_{n+2})$  est l'élément de volume de l'espace de phase à 3n dimensions qui est donné par :

$$d\Phi_n(P; P_3, \dots, P_{n+2}) = \delta^4(P - \sum_{i=1}^n P_{i+2}) \prod_{i=3}^{n+2} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \text{ où } (P_i = (E_i, \vec{p}_i); i=1, n+2) \text{ sont les}$$

quadrivecteurs énergie-quantité de mouvement des n+2 particules de masses  $m_i$  qui participent à la réaction.

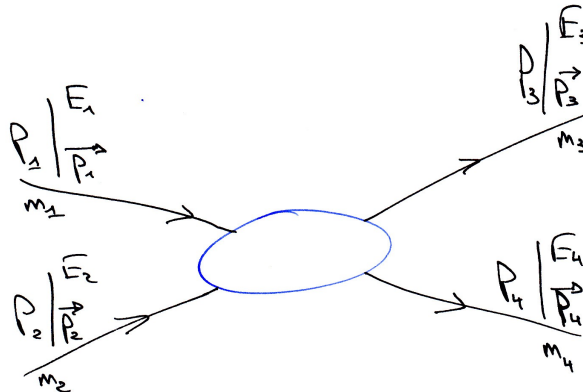
Dans une expérience sur une cible fixe (par rapport au laboratoire) constituée de particules de masse  $m_2$ , on obtient dans le référentiel du laboratoire :  $\sqrt{(P_{1lab} \cdot P_{2lab})^2 - m_1^2 m_2^2} = \sqrt{(E_{1lab} m_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = p_{1lab} m_2$ .

Plus généralement, une réaction doit être étudiée dans le centre de masse de la collision et dans ce cas,

$$\begin{aligned} \sqrt{(P_{1cm} \cdot P_{2cm})^2 - m_1^2 m_2^2} &= \sqrt{(E_{1cm} E_{2cm} + p_{cm}^2)^2 - m_1^2 m_2^2} = p_{cm} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2(E_{1cm} E_{2cm} + p_{cm}^2)} \\ &= p_{cm} \sqrt{(P_{1cm} + P_{2cm})^2} = p_{cm} \sqrt{E_{cm}^2} = p_{cm} E_{cm} \end{aligned}$$

### 5.1 Réactions à deux particules dans la voie de sortie et variables de Mandelstam :

Une réaction de ce type est schématisée dans la figure qui suit :



On définit 3 invariants de Lorentz : s, t et u – appelés variables de Mandelstam - à partir des quadrivecteurs énergie-quantité de mouvement des quatre particules qui participent à la réaction :

$$s = (P_1 + P_2)^2 = (P_3 + P_4)^2 = E_{cm}^2 ; t = (P_1 - P_3)^2 = (P_2 - P_4)^2 ; u = (P_1 - P_4)^2 = (P_2 - P_3)^2 .$$

On peut aisément montrer que :  $s+t+u = \sum_{i=1}^4 m_i^2$ .

La section efficace différentielle peut alors se réécrire sous la forme :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s} \frac{1}{p_{1cm}^2} |M|^2.$$

**Exercice 2 :** Établir l'expression précédente .

Dans le centre de masse :

$$t = (E_{1cm} - E_{3cm})^2 - (\vec{p}_{1cm} - \vec{p}_{3cm})^2 = (E_{1cm} - E_{3cm})^2 - (p_{1cm} - p_{3cm})^2 - 4 p_{1cm} p_{3cm} \sin^2(\theta_{cm}/2),$$

$$E_{1cm} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} \quad (\text{faire usage de } P_2 = (P_3 + P_4) - P_1 \text{ pour établir cette expression}),$$

$$E_{2cm} = \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}},$$

$$E_{3cm} = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}, \quad E_{4cm} = \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}} \quad \text{et ;}$$

$$p_{1cm} = p_{2cm} = p_{cm} = \sqrt{E_{1cm}^2 - m_1^2} = \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{(m_1 + m_2)^2}{s}\right) \left(1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{s}\right)},$$

$$p_{3cm} = p_{4cm} = p'_{cm} = \sqrt{E_{3cm}^2 - m_3^2} = \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{(m_3 + m_4)^2}{s}\right) \left(1 - \frac{(m_3 - m_4)^2}{s}\right)},$$

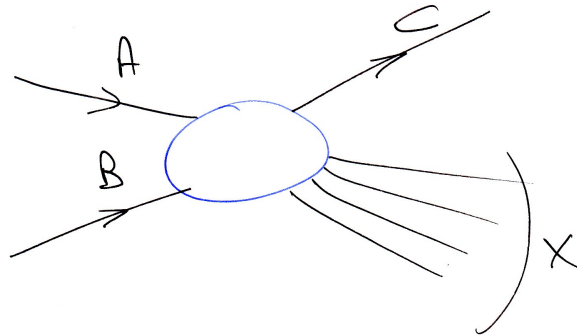
$$\cos\theta_{cm} = \frac{(s(t-u) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2))}{4s p_{cm} p'_{cm}}.$$

Ainsi, le domaine de variation de  $t$  (dans le CM) est délimité par les valeurs suivantes :

$$t_1(\theta_{cm} = \pi) = \frac{(m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 + m_4^2)^2}{4s} - (p_{cm} + p'_{cm})^2,$$

$$t_0(\theta_{cm} = 0) = \frac{(m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 + m_4^2)^2}{4s} - (p_{cm} - p'_{cm})^2.$$

### 5.2 Réactions inclusives :



On étudie ici les réactions du type :  $A+B \rightarrow C+X$  (voir figure), où seule la particule C est détectée dans la voie de sortie. La section efficace différentielle invariante est alors :  $E_C \frac{d^3 \sigma}{d^3 p_C} = \frac{d^3 \sigma}{d\Phi_C dy_C p_{CT} dp_{CT}}$ .

Pour établir cette formule on part de l'élément différentiel en coordonnées cylindriques :

$$d^3 p_C = p_{CT} dp_{CT} d\Phi_C dp_{Cz}, \text{ puis on remarque que : } dp_{Cz} = m_{CT} \cosh y_C dy_C = E_C dy_C.$$

Par ailleurs, nous devons nous souvenir que  $dy, p_T, dp_T, \Phi$  et  $d\Phi$  sont les mêmes dans tout référentiel galiléen se déplaçant sur l'axe (o,z). Ainsi la section efficace d'un processus inclusif mesuré sur une cible fixe peut facilement être utilisée sur un collisionneur à condition d'utiliser les coordonnées :  $y, \Phi$  et  $p_T$ .

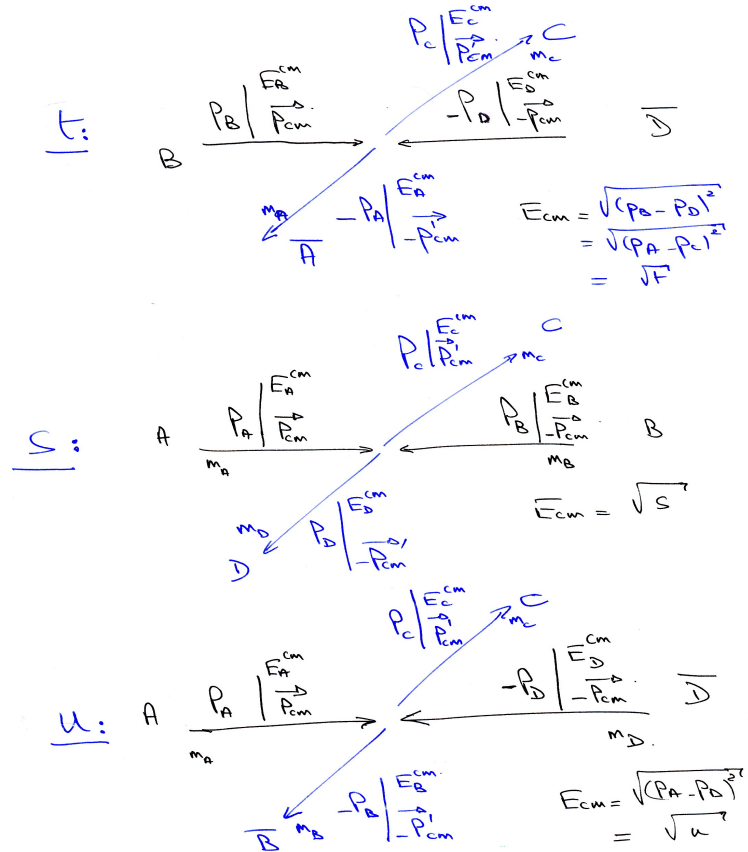
De plus la forme de la distribution du nombre d'événements par unité de rapidité  $dN/dy_C$  est la même dans toute expérience réalisée en collision frontale, c'est-à-dire si la quantité de mouvement transverse est nulle dans la voie d'entrée.

En prenant la moyenne sur  $\Phi$ , la section efficace différentielle devient :  $\frac{d^2 \sigma}{\pi dy_C d(p_{CT}^2)}$ .

### 5.3 Canaux croisés :

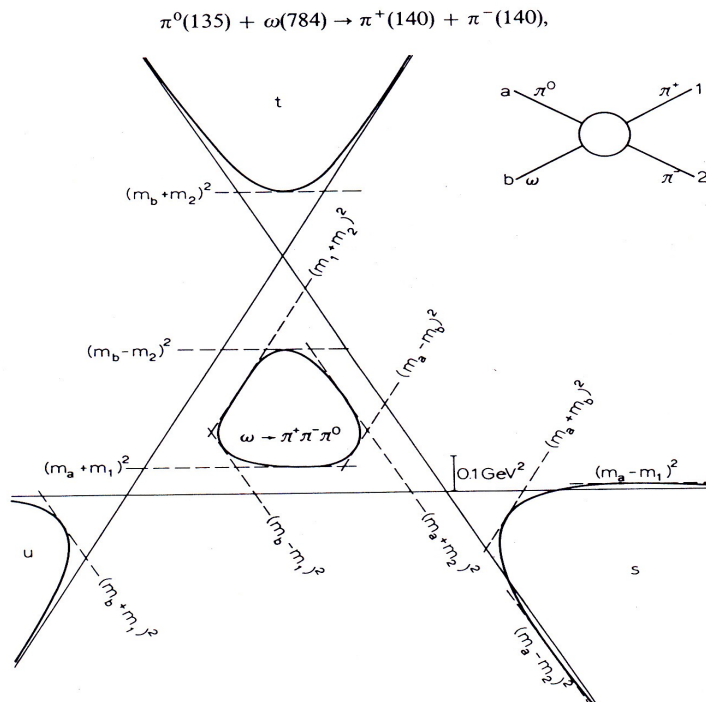
La prescription de Stückelberg-Feynman (une antiparticule d'énergie positive est une particule d'énergie négative qui remonte le temps et inversement une particule d'énergie positive est une antiparticule d'énergie négative qui remonte le temps) appliquée à un processus à deux corps tel que :  $A+B \rightarrow C+D$  permet d'anticiper l'existence de trois autres canaux «croisés» :  $A+\bar{D} \rightarrow C+\bar{B}$  ou  $\bar{C}+B \rightarrow \bar{A}+D$ ,  $\bar{D}+B \rightarrow C+\bar{A}$  ou  $A+\bar{C} \rightarrow \bar{B}+D$ ,  $A \rightarrow \bar{B}+C+D$  ou  $B \rightarrow \bar{A}+C+D$  qui peuvent être ouverts cinématiquement (selon les valeurs des masses de ces particules).

$A+\bar{D} \rightarrow C+\bar{B}$  et  $\bar{D}+B \rightarrow C+\bar{A}$  sont respectivement les canaux u et t, car les variables u et t représentent le carré de l'énergie totale dans le centre de masse de la réaction. Par la même définition,  $A+B \rightarrow C+D$  est le canal s.



Le quatrième canal est une désintégration.

Les domaines permis pour ces quatre canaux peuvent être représentés dans un diagramme dit de Mandelstam dont un exemple est donné ci-dessous :



Au premier ordre des perturbations et à condition de ne considérer que des particules non polarisées dans la voie d'entrée (particules de spins nuls ou moyenne sur les états de spins) et de sommer sur tous les états de spins possibles dans la voie de sortie, les éléments de matrice des divers canaux sont alors reliés par :

$$M_{AB \rightarrow CD}(P_A, P_B, P_C, P_D) = M_{A\bar{D} \rightarrow C\bar{B}}(P_A, -P_D, P_C, -P_B) = M_{\bar{D}B \rightarrow C+\bar{A}}(-P_D, P_B, P_C, -P_A)$$

ou encore :

$$M_{AB \rightarrow CD}(s, u, t) = M_{A\bar{D} \rightarrow C\bar{B}}(u, s, t) = M_{\bar{D}B \rightarrow C+\bar{A}}(t, u, s)$$

## 6 Pour en savoir plus :

- Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>
- Particle kinematics, E. Byckling and K. Kajantie, John Wiley & Sons
- Elementary particle theory, Martin and Spearman, North-Holland (1970)
- Halzen and Martin, An introductory course in modern particle physics, John Wiley & Sons (1984)

## 7 Exercices :

### 7.1 Exercice 3 :

Calculer l'énergie seuil des réactions :  $\bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+$ ,  $p p \rightarrow p p \bar{p} p$  sachant que dans le laboratoire le proton cible est à l'arrêt. Ces deux réactions sont célèbres : la première a servi à découvrir le neutrino et la seconde l'antiproton .

### 7.2 Exercice 4 :

Calculer dans le repère du laboratoire l'angle d'ouverture entre les deux photons provenant de la désintégration d'un pion neutre  $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$  en fonction des énergies  $E_1$  et  $E_2$  de ces deux photons .

Montrer qu'il existe un angle d'ouverture minimal. À quel angle cela correspond-t-il dans le centre de masse ?

Pour quelle raison l'angle d'ouverture nul est-il interdit ?

### 7.3 Exercice 5 :

Tracer le diagramme de Dalitz de la désintégration  $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0$  .

### 7.4 Exercice 6 :

Étudier et construire le diagramme de Mandelstam de la diffusion élastique  $e^- \mu^-$ , celle-ci étant choisie comme étant dans le canal s . Indices : exprimer les variables s, t, u en fonction de  $p_{cm}$  et  $\theta_{cm}$  et déterminer les frontières des domaines permis pour  $\cos \theta = 1$  et  $\cos \theta = -1$  .