

Accélérateurs de Particules : Principes & Limitations

Table des matières

1	Introduction :	3
2	Principes fondamentaux :	3
	2.1 Équations de Maxwell :	3
	2.2 Force de Lorentz :	4
3	Équations relativistes du mouvement d'une particule en coordonnées cylindriques :	5
	3.1 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme :	6
	Application : Aimants dipolaires du LHC	7
	3.2 Rayonnement synchrotron :	8
	Exemples :	9
	3.3 Focalisation par un champ magnétique quadripolaire :	10
4	Les accélérateurs électrostatiques :	12
	4.1 Générateur en cascade de Cockcroft et Walton :	13
	4.2 Générateur de Van de Graaff :	14
5	Les accélérateurs linéaires (linacs) :	16
	5.1 Linac de Wideröe :	16
	5.2 Cavités résonantes :	17
	Modèle électrique de cavités parfaites :	17
	Modèle électrique de cavités réelles :	17
	Facteur de qualité d'une cavité résonnante :	18
	Cavité résonnante cylindrique :	19
	5.3 Guides d'ondes :	20
	5.4 Linac d'Alvarez :	24
	Exemple de linac d'Alvarez : l'accélérateur linéaire de LAMPF	25
	5.5 Linac à cavités résonnantes couplées :	26
	5.6 Les linacs pour électrons de haute énergie :	28
	Impédance shunt :	30
	Exemple :	31
6	Accélérateurs circulaires	31
	6.1 Cyclotron à champ uniforme :	31
	6.2 Synchrocyclotron :	33
	6.3 Cyclotrons isochrones à champ variable en azimut :	34
	Cyclotron de 590 MeV de PSI à Zurich	35
	6.4 Synchrotrons :	36
	Synchrotron à fonctions séparées	37
	synchrotron à focalisation faible	39
	synchrotron à focalisation forte	39
	synchrotron à gradient alterné	39
	Cycle de fonctionnement	39
7	Éléments de dynamique de faisceau :	42
	7.1 Système de coordonnées :	42
	7.2 Mouvement transverse bétatron : équation de Hill :	42
	Synchrotron à gradient constant : focalisation faible	43
	Solution générale :	43
	7.3 Matrice de transport :	44
	7.4 Émittance :	45
	Évolution de l'émittance d'une particule dans une structure FODO :	46
	Focalisation dans une section droite	47

Accélération et émittance normalisée	47
7.5 Dynamique longitudinale :	47
Énergie de transition :	48
Oscillations synchrotrons	49
8 Collisionneurs :	50
Diffusion sur une cible fixe :	51
Cas idéal de collision frontale :	51
Les faisceaux ont un défaut d'alignement	52
Les faisceaux se croisent avec un angle	53
Les faisceaux sont asymétriques et tournés l'un par rapport à l'autre :	53
Les faisceaux ne sont pas parallèles	54
Exemple : le LHC	57
8.1 Refroidissement des faisceaux d'antiparticules :	58
Cas des positons :	58
Cas des antiprotons :	58
9 Pour en savoir plus :	60

1 Introduction :

Pour une bonne part, l'essor de la physique des hautes énergies durant la seconde moitié du vingtième siècle est due aux progrès remarquables accomplis dans les techniques de l'accélération des particules chargées. Ce sont les accélérateurs de particules qui fixent actuellement les limites des énergies accessibles à grande luminosité :

Tevatron, Fermilab (USA) $\sqrt{s}=2 \text{ TeV}$, $p \bar{p}$

LEP200, CERN $\sqrt{s}=209 \text{ GeV}$, $e^- e^+$

HERA, DESY (Allemagne) $\sqrt{s}=332 \text{ GeV}$, $e (30 \text{ GeV}) p (920 \text{ GeV})$

, où \sqrt{s} est l'énergie totale disponible dans le centre de masse des collisions.

Pour mieux apprécier ce que l'on entend par haute énergie, on peut calculer la puissance du faisceau aux points de collision à LEP200. La puissance transportée par un faisceau de particules portant chacune une énergie cinétique E , une charge e et produisant un courant total moyen I est donnée par :

$$P(\text{MW}) = E(\text{GeV}) \times I(\text{mA})$$

ce qui pour LEP200 conduit à : $P_{LEP200} = 209 \times 6 = 1254 \text{ MW}$,

qui est comparable à la puissance électrique produite par une centrale nucléaire ! Cependant, seule une fraction infinitésimale de cette puissance est consommée par les collisions e^+e^- .

Ce cours exposera les notions fondamentales qui permettent de comprendre le fonctionnement et les limitations des diverses machines: cyclotron, linac, synchrotron...

2 Principes fondamentaux :

2.1 Équations de Maxwell :

Les accélérateurs de particules mettent en œuvre les lois fondamentales de l'électromagnétisme. Dans le système MKS, les équations de Maxwell sont :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & , & & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & , & & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \rho \vec{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

où :

ρ représente la densité de charges source,

\vec{v} est la vitesse des charges source,

\vec{E}, \vec{B} sont les champs électrique et magnétique externes

et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ F/m}$.

\vec{E} et \vec{B} dérivent d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur à travers les expressions suivantes:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

avec :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{pour les calculs statiques, lorsque } \rho \text{ et } \vec{j} \text{ ne dépendent pas du temps})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$(V, c\vec{A})$ forme le quadrivecteur potentiel ou A^μ en notation tensorielle.

2.2 Force de Lorentz :

C'est cette force qui est à la base de l'accélération et du guidage d'un faisceau de particules. Pour une charge q animée d'une vitesse \vec{V} dans un champ électromagnétique, elle s'exprime par :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V} \times \vec{B}.$$

Ainsi, la variation de la quantité de mouvement d'une charge mobile soumise à cette force est :

$$\Delta \vec{p} = \int \vec{F} dt,$$

son gain en énergie cinétique étant :

$$\Delta E_{cin} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{avec} \quad d\vec{s} = \vec{V} dt.$$

On a :

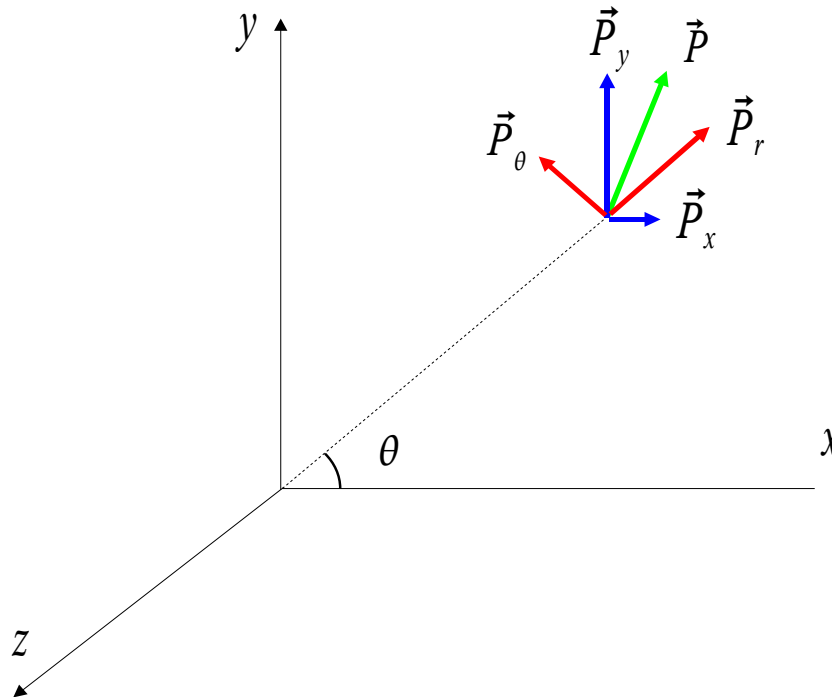
$\Delta E_{cin} = q \int \vec{E} \cdot d\vec{s} + q \int (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot \vec{V} dt$ dans laquelle on peut aisément réaliser que le deuxième terme est nul. On obtient finalement :

$\Delta E_{cin} = q \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Delta E_{tot}$ avec $E_{tot} = E_{cin} + m$, qui est l'énergie totale de la particule de masse m accélérée. (Rappel : la masse d'une particule est un invariant relativiste)

«L'accélération» (gain en énergie) d'une particule chargée est toujours produite par un champ électrique. La première composante de la force de Lorentz est une force «accélératrice» qui ne dépend pas de la vitesse de la particule. La deuxième composante de la force de Lorentz (appelée par ailleurs force de Laplace) dépend de la vitesse. Elle est normale à \vec{V} et \vec{B} et elle n'induit pas de changement d'énergie cinétique. C'est une force défléchissante que l'on utilise pour le guidage des faisceaux.

3 Équations relativistes du mouvement d'une particule en coordonnées cylindriques :

En coordonnées cartésiennes on a : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (équation de la dynamique relativiste)



$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad , \quad z = z$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

L'axe z restant inchangé , on obtient : $\frac{d p_z}{dt} = F_z$

En revanche sur l'axe x , on a : $\frac{d p_x}{dt} = F_x$, avec $P_x = P_r \cos \theta - P_\theta \sin \theta$, $F_x = F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta$

soit : $\dot{p}_r \cos \theta - p_r \sin \theta \dot{\theta} - \dot{p}_\theta \sin \theta - p_\theta \cos \theta \dot{\theta} = F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta$.

C'est une équation du type $A \cos \theta + B \sin \theta = 0$ qui doit être satisfaite quel que soit θ , ce qui implique que :

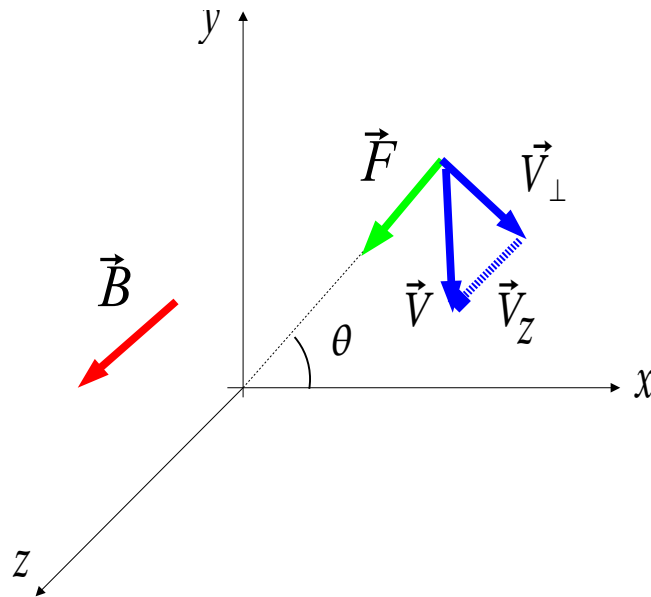
$$A=0 \Rightarrow \dot{p}_r - p_\theta \dot{\theta} = F_r \quad , \quad \text{équation radiale}$$

$$B=0 \Rightarrow \dot{p}_\theta + p_r \dot{\theta} = F_\theta \quad , \quad \text{équation azimutale}$$

$-p_\theta \dot{\theta} / m$ est l'accélération centripète avec $p_\theta = \gamma m v_\theta$, soit encore: $-p_\theta \dot{\theta} / m = -\gamma \frac{v_\theta^2}{r}$;

$p_r \dot{\theta} / m$ est l'accélération de Coriolis qui s'exprime par : $p_r \dot{\theta} / m = \gamma \frac{v_r v_\theta}{r}$.

3.1 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme :



La force qui est appliquée à la charge q est : $\vec{F} = q \vec{V} \times \vec{B}$. \vec{B} étant parallèle à l'axe $(0, z)$, ceci implique que $F_z = 0$, ou encore que le mouvement est uniforme selon cet axe . La force de Laplace peut se simplifier sous la forme de : $\vec{F} = q \vec{V}_\perp \times \vec{B}$ dans laquelle \vec{V}_\perp est la projection de \vec{V} sur le plan (θ, x, y) . Puisque cette force ne provoque aucun accroissement de l'énergie cinétique de q , on obtient $V_\perp = \text{cte}$. \vec{F} reste à tout instant perpendiculaire à \vec{V}_\perp . Il résulte de ces considérations que le mouvement de q dans le plan (x, y) est circulaire uniforme et que \vec{F} est une force centripète. Si l'origine de notre repère est choisie au centre de l'orbite, on a : $V_r = 0$ et $\dot{p}_r = 0$, ce qui considéré dans l'équation radiale du mouvement de q donne :

$$q V_\perp B = \gamma m \frac{V_\perp^2}{r}$$

$$q B = \gamma m \frac{V_\perp}{r} \quad \text{où } r \text{ est le rayon de courbure de l'orbite .}$$

$$P_\perp = q B r$$

Soit encore : $P_\perp (\text{GeV}) = 0,3 z B (\text{T}) r (\text{m})$ dans laquelle z est l'état de charge de q ($q = Z e$) .

Dans un aimant, on utilise fréquemment la rigidité magnétique qui est définie comme étant le produit de B par le rayon de courbure (noté ρ) et qui ne dépend que de l'impulsion transverse de la particule (et de son état de charge), soit : $B (\text{T}) \rho (\text{m}) = 3,33 P_\perp (\text{GeV}) / z$.

La fréquence de rotation du mouvement s'obtient par :

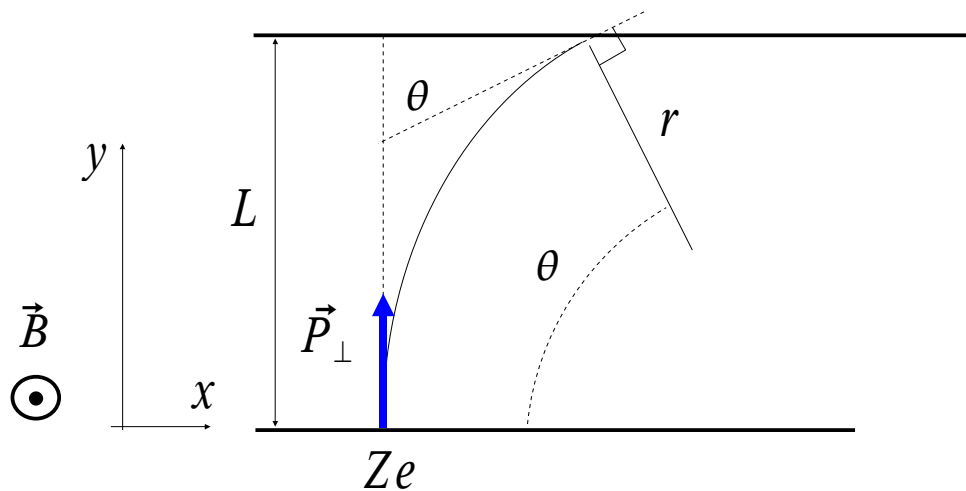
$$\dot{\theta} = \frac{V_{\perp}}{r} = \frac{q B}{\gamma m}$$

Le mouvement combiné de q dans l'espace à 3 dimensions est une hélice qui a pour pas:

$$p^h = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} \cdot V_z = \frac{2\pi \gamma m}{q B} \frac{P_z}{\gamma m} \Rightarrow p^h = \frac{2\pi P_z}{q B}$$

Soit encore : $P_z(\text{GeV}) = \frac{0,3}{2\pi} z B(\text{T}) p^h(\text{m})$.

Calculons maintenant l'angle de déflexion θ d'une particule traversant une zone de champ uniforme d'une profondeur L :



$$\sin \theta = \frac{L}{r} = 0,3 z \frac{B(\text{T}) L(\text{m})}{P_{\perp}(\text{GeV})}$$

Application : Aimants dipolaires du LHC

On désire maintenir sur une orbite circulaire de 26 659 m de circonférence un faisceau de protons de 7 TeV en énergie. La machine a nécessairement une structure polygonale. Elle possède un dipôle magnétique par côté de ce polygone. Le nombre de côtés du polygone, ou de dipôles , est : $N=1232$, ceci implique que l'angle de déflexion par côté doit être: $\theta = \frac{2\pi}{1232}$. Ces aimants doivent donc fournir un produit $B L = 119 \text{ T m}$. Les dipôles du LHC seront supraconducteurs, bobinés à partir de conducteur en N_b-T_i . Ils seront refroidis à la température de 1,9 K par de l'hélium liquide superfluide . Ils délivreront un champ de 8,4 T sur une longueur de 14,2 m . La couverture de la machine (pourcentage de la circonférence de l'orbite des faisceaux équipée d'aimants) sera de 65,5 % . Si l'aimant est droit (cylindrique) il doit avoir une ouverture plus grande que la flèche du faisceau qui est égale à :

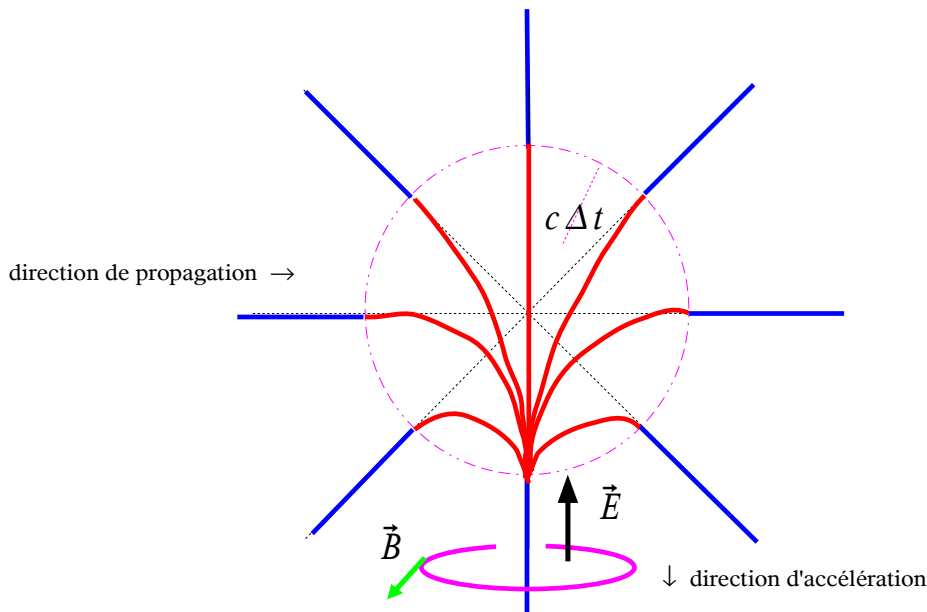
$$r(1 - \cos \frac{\theta}{2}) \approx \frac{r \theta^2}{8} = \frac{L \theta}{8}$$

, soit 9 mm , qui est jugée trop grande. Les dipôles du LHC sont donc courbes.

3.2 Rayonnement synchrotron :

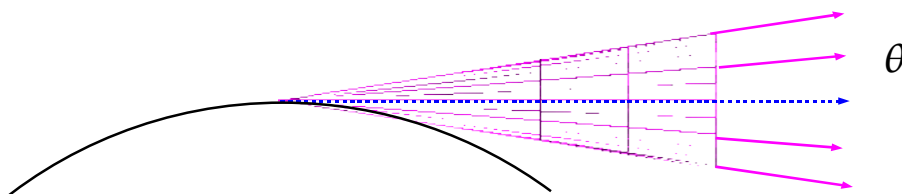
Physiquement, le rayonnement synchrotron est une conséquence du fait que la vitesse de la lumière est finie.

Une charge ponctuelle en mouvement uniforme, observée dans son référentiel propre, produit un champ radial de Coulomb. Pour $\Delta t \geq 0$, la charge est accélérée perpendiculairement à sa direction de propagation (particules dans un champ magnétique uniforme).



Du fait que la vitesse de la lumière est finie, les lignes de champ sont perturbées sur un sphère de rayon $c \Delta t$. Il y a apparition d'une nouvelle composante longitudinale du champ électrique, variable en temps (du fait du mouvement accéléré de q), de sens opposé à la direction d'accélération et d'un champ magnétique azimuthal induit par la variation de \vec{E} ($\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$). Le vecteur de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ qui mesure la quantité d'énergie électromagnétique transportée par unité de surface et par seconde est ici non-nul. Ceci indique l'émission d'un rayonnement électromagnétique dans un plan transverse à la direction d'accélération. Pour des particules relativistes observées dans un repère immobile, l'effet Doppler accroît la fréquence du rayonnement dans la direction de propagation et inversement il la diminue dans la direction opposée. Le résultat se traduit par un transfert de l'énergie rayonnée dans un cône centré sur la direction de propagation ayant un demi-angle quadratique moyen:

$$\theta_{rms} \approx \frac{1}{\gamma}, \text{ où } \gamma \text{ est le facteur relativiste de la charge } q.$$



Le rayonnement synchrotron tient son nom du fait qu'il a été mis en évidence expérimentalement pour la première fois auprès d'un synchrotron à électrons de 70 MeV construit par la General Electric en 1947 par Langmuir et ses collègues.

Pour une machine circulaire, l'accélération normale est produite par la force de Laplace induite par des dipôles de déviation. Dans ce cas, on peut montrer que la puissance rayonnée par une particule portant une charge e et une quantité de mouvement p est donnée par :

$$P_{RS} = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^4 \beta^4}{r^2} \quad \text{où } r \text{ est la rayon de courbure dans les aimants.}$$

Puisque $\frac{p}{mc} = \gamma \beta$, on obtient : $P_{RS} \propto \frac{\gamma^4 \beta^4}{r^2} = \frac{1}{(mc)^4} \frac{p^4}{r^2}$. Pour des électrons et des protons de même quantité de mouvement placés sur la même orbite, on a :

$$\frac{P_{RS}^p}{P_{RS}^e} = \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^4 = \left(\frac{1}{1836}\right)^4 \approx 9 \cdot 10^{-14}.$$

Le rayonnement synchrotron est une limitation pour les machines à électrons circulaires.

Pour des électrons, on a l'expression spécialisée suivante:

$$P_{RS}(\text{GeV/s}) = \frac{c \cdot C_y}{2\pi} \frac{E^4}{r^2} \quad \text{dans laquelle } C_y \text{ est la constante de Sand, } C_y = 8,86 \cdot 10^{-5} \text{ m/GeV}^3.$$

Exemples :

$$\text{LEP200 : } E_e = 108 \text{ GeV, } r = 3096 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad P_{RS} = 61 \text{ TeV/s (par électron)}$$

$$\text{LHC : } E_p = 7000 \text{ GeV, } r = 2778 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad P_{RS} = 0,31 \text{ eV/s (par proton)}$$

Nous allons maintenant nous intéresser au calcul de la puissance totale perdue sous la forme de rayonnement synchrotron dans une machine circulaire. Nous commencerons tout d'abord par le calcul de la perte par tour pour une seule particule :

$$\Delta E_{RS} = P_{RS} \frac{2\pi r}{\beta c} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\beta^3 \gamma^4}{r}$$

, où r est le rayon de courbure dans les dipôles de la machine, avec $r = r_{\text{tunnel}} \eta_{\text{couv}}$, η_{couv} étant la fraction de la circonférence du tunnel couverte par des dipôles.

Pour des électrons ultra-relativistes ($\beta=1$), on obtient :

$$\Delta E_{RS}(\text{GeV}) = C_y \frac{E^4}{r} \quad (C_y \text{ est la constante de Sand}).$$

Si l'on note C_{tunnel} la circonférence du tunnel, f_{rev} la fréquence de révolution et N_e le nombre total d'électrons stockés sur l'orbite, on peut dériver l'expression du courant total moyen I :

$$I = e f_{\text{rev}} N_e, \quad \text{avec } f_{\text{rev}} = \frac{\beta c}{C_{\text{tunnel}}} \text{ (tours/s)}.$$

Soit, pour la puissance totale rayonnée :

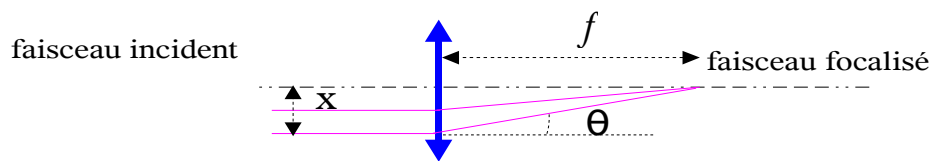
$$P_{RS}^t = \Delta E_{RS} \frac{I}{e} \Rightarrow P_{RS}^t (\text{MW}) = 8,86 \cdot 10^{-2} \frac{E^4 (\text{GeV})}{r (\text{m})} I (\text{A}) \quad (\text{pour des électrons})$$

La table ci-dessous présente la valeur de cette grandeur pour quelques accélérateurs.

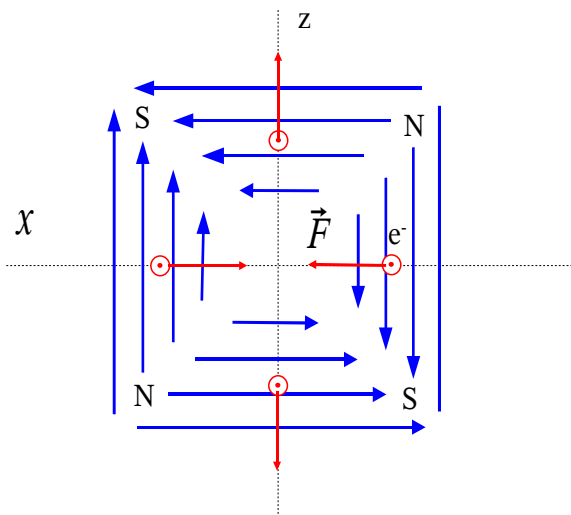
	$E(\text{GeV})$	$r(\text{m})$	$I(\text{mA})$	$\Delta E_{RS}(\text{GeV}/\text{tour})$	$P_{RS}^t(\text{MW})$
LEP100	50	3096	6	0,17	1,1
LEP200	104,5	3096	6	3,4	20,5
LHC	7000	2778	1060	$6,9 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$

3.3 Focalisation par un champ magnétique quadripolaire :

Défléchir un faisceau ne suffit pas en général. Fréquemment, on est également amené à ajuster la taille transverse des faisceaux. Pour cela, on utilise dans la plupart des cas des éléments d'optique magnétique. On fait appel aux mêmes concepts que ceux utilisés en optique géométrique classique.



L'un des éléments les plus fréquemment rencontrés est le quadripôle magnétique :



On note sur la figure précédente qu'un faisceau d'électrons est défocalisé dans la direction verticale et focalisé dans la direction horizontale.

Le champ produit par un quadripôle parfait possède des composantes qui croissent linéairement lorsque l'on s'écarte de son axe, c'est-à-dire :

$$B_z = \frac{\partial B_z}{\partial x} x, B_x = \frac{\partial B_x}{\partial z} z, \text{ avec } \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z} = \text{cte} .$$

On définit la raideur k d'un quadripôle par :

$$k = \frac{1}{B_z \rho} \frac{\partial B_z}{\partial x} \text{ avec } [k] = \text{m}^{-2}$$

On trouve également dans la littérature l'indice de champ qui est défini par : $n = \rho^2 k$ avec $0 < n < 1$.

À la position x , le changement d'angle horizontal induit par le champ vertical dans un quadripôle de profondeur l , est donné par :

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{l}{\rho} = \frac{l B_z}{B_z \rho} = l \frac{(\partial B_z / \partial x) x}{B_z \rho} = l k x, \text{ où } \rho \text{ est le rayon de courbure engendré par } B_z.$$

Par analogie avec une lentille optique convergente dans la direction horizontale, pour laquelle l'angle de déflexion est donné par :

$$\tan \theta = \frac{x}{f} \approx \theta, \text{ pour les petits angles, on tire : } f = \frac{1}{kl} .$$

Puisque f est positive pour une lentille convergente, k est donc positive pour un quadripôle qui focalise dans la direction horizontale. Inversement et pour ce même quadripôle, k est négative dans la direction verticale. Ici le produit kl est l'inverse de la distance focale du quadripôle.

Il faut observer que puisque k dépend de la quantité de mouvement de la particule, un quadripôle a une réponse chromatique.

Pour obtenir une focalisation dans les deux directions transverses, il faut faire appel à un doublet de quadripôles placés dans le faisceau l'un après l'autre et séparés d'une distance d . La distance focale d'un doublet de lentilles est donnée par :

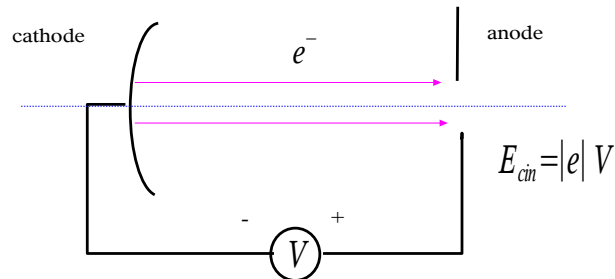
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} .$$

Si on ajuste les distances focales des quadripôles (en jouant avec les intensités des champs magnétiques, donc des courants circulant dans les bobines) de telle sorte que $f_1 = -f_2 = f'$, ou encore un quadripôle convergent (dans une direction) suivi d'un quadripôle divergent (dans la même direction), on obtient un système qui focalise dans les deux directions avec un distance focale donnée par :

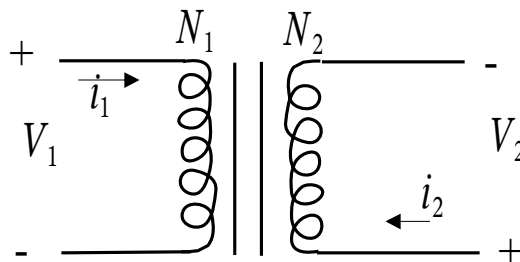
$$f = \frac{|f_1 f_2|}{d} = \frac{f'^2}{d} .$$

4 Les accélérateurs électrostatiques :

Comme cette dénomination l'indique, le champ électrique accélérateur dans ce type de machines est obtenu à partir d'une différence de potentiels statique. Le schéma suivant présente la machine de ce type la plus simple que l'on puisse imaginer (penser au canon à électrons d'un tube cathodique):



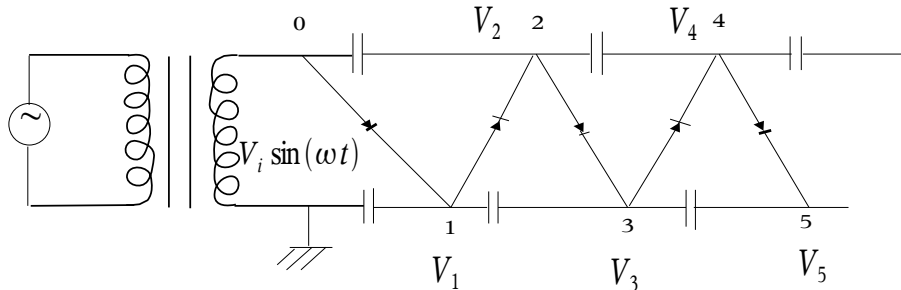
Un générateur de haute tension est utilisé entre l'anode et la cathode. Ce générateur de haute tension peut être un transformateur rectifié :



$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1, \quad N_1 i_1 = N_2 i_2, \quad V_1 i_1 = V_2 i_2$$

Au-dessus de 100 kV (au secondaire) cette configuration ne peut plus être utilisée car on rencontre des problèmes d'isolation électrique et la taille du noyau de fer du transformateur devient excessive.

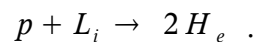
4.1 Générateur en cascade de Cockcroft et Walton :



À l'équilibre , plus aucun courant ne doit circuler dans le circuit. On doit donc satisfaire:

$$\begin{aligned}
 \forall t, V_0(t) &= V_i \sin(\omega t) \\
 \forall t, V_1(t) &\geq V_0(t) \Rightarrow V_1 = V_i \\
 \forall t, V_2(t) &\geq V_1(t) = V_i, \quad V_2(t) = V_0(t) + \Delta V \Rightarrow \Delta V = 2V_i \\
 \forall t, V_3(t) &\geq V_2(t) \Rightarrow V_3 = 3V_i \\
 &\vdots \\
 V_5 &= 5V_i
 \end{aligned}$$

La tension au point N (impair) est multipliée par N . En 1932, Cockcroft et Walton construisirent le premier accélérateur utilisant un générateur de la sorte. Ils purent atteindre une HT de 600 kV et réaliser ainsi la première réaction nucléaire à l'aide de particules artificiellement accélérées :

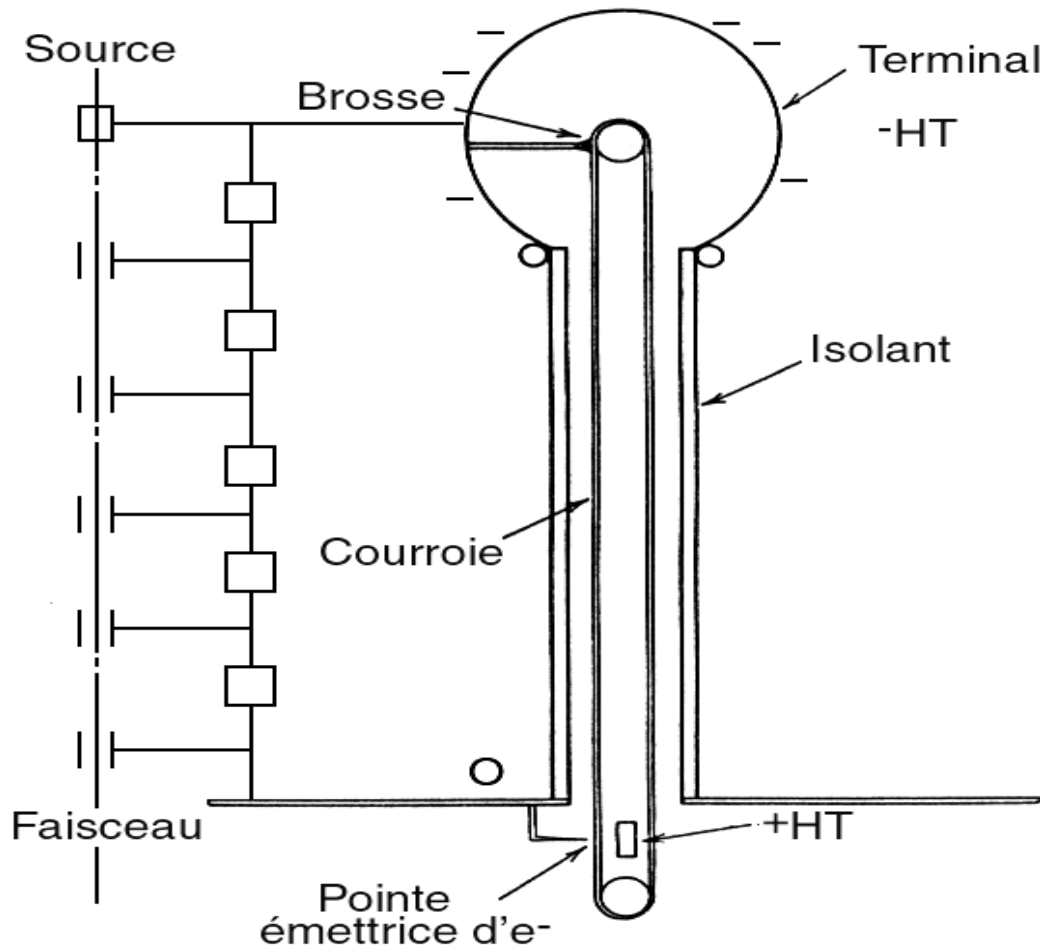


Du fait de leur grande efficacité et de leur simplicité de fonctionnement, les générateurs de Cockcroft - Walton sont toujours utilisés dans les accélérateurs modernes de protons comme pré-injecteurs.

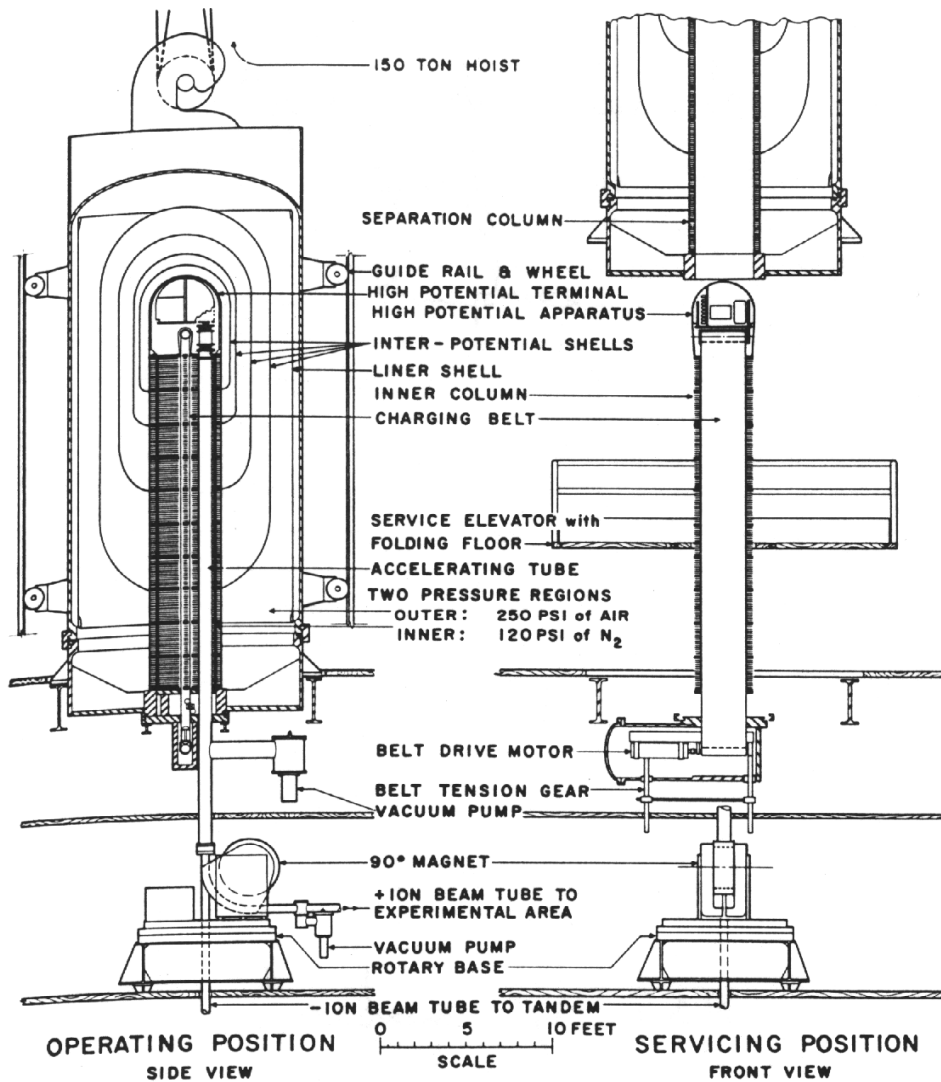
Pour atteindre $N V_i$, il faut attendre que tous les condensateurs soient totalement chargés. L'accélération de particules consomme de l'énergie qui tend à décharger les condensateurs. En conséquence, les générateurs de Cockcroft-Walton ne peuvent être des machines continues.

4.2 Générateur de Van de Graaff :

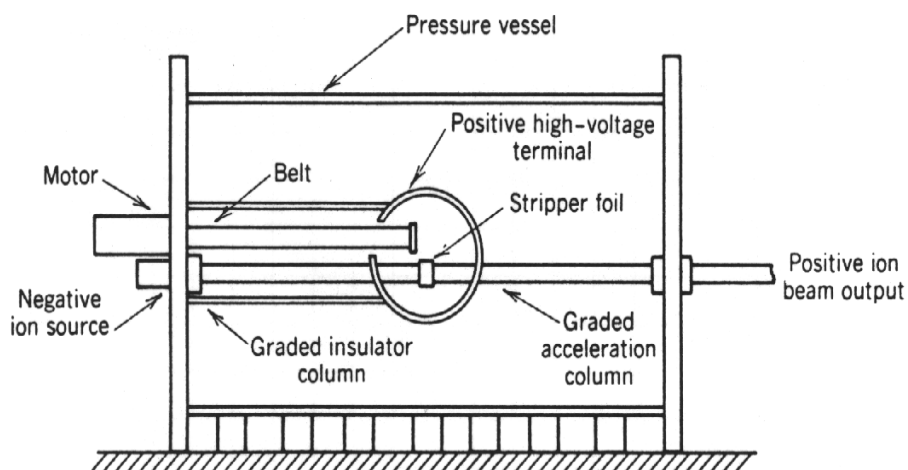
Une courroie isolante placée entre une pointe émettrice et un plot porté à une tension supérieure à la tension de rupture, véhicule les électrons vers un terminal où ils sont recueillis par une brosse spéciale. Le terminal est placé au bout d'une colonne isolante qui permet d'atteindre des tensions électrostatiques élevées. Il est connecté à un diviseur résistif, dont l'extrémité est reliée au potentiel zéro de la pointe émettrice, afin d'établir un champ électrique accélérateur uniforme le long du tube à vide du faisceau.



Ce type de générateurs permet d'atteindre des tensions électrostatiques d'un maximum de 15 MV dans des conditions stables. Les courants accélérés délivrés par cette machine sont continus et peuvent atteindre environ $10 \mu\text{A}$. En mode tandem (selon le schéma qui suit), on peut doubler l'énergie cinétique des particules accélérées.



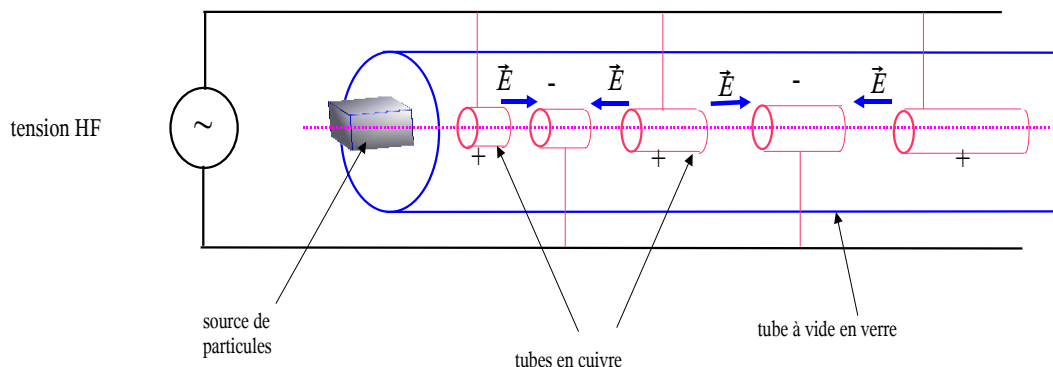
LOS ALAMOS VERTICAL VAN de GRAAFF



5 Les accélérateurs linéaires (linacs) :

5.1 Linac de Wideröe :

Cette configuration de machines a été proposée par G. Ising en 1924 et R. Wideröe en 1928 .



La tension délivrée par le générateur HF est alternative: $V(t) = \Delta V \sin(\omega t + \phi_s)$. Chaque interstice entre deux cavités produit une différence de potentiel maximale ΔV .

La particule y gagne l'énergie: $|q| \Delta V \sin(\phi_s)$. À l'intérieur d'un tube en cuivre, le champ électrique est nul. La particule traverse chaque interstice d'accélération au moment où le champ est positif : $\frac{\Delta V}{d} \sin(\phi_s)$, ϕ_s étant la phase de la machine (mesurée par rapport au passage à zéro avant le front positif). Elle ressort de chaque tube une demi-période plus tard lorsque le champ s'est inversé. La synchronisation de la machine exige :

$$L_i \text{ (longueur du } i^{\text{ème}} \text{ tube)} = \frac{1}{2} v_i T_{HF} = \frac{1}{2} \beta_i T_{HF} \cdot c \text{ ,}$$

En conséquence, la longueur des tubes croît le long de la machine au fur et mesure que la particule gagne de la vitesse.

R. Wideröe fut le premier à construire une telle machine pour accélérer des ions K^+ à 50 keV (1928) . En 1931, D. Sloan et E. Lawrence construisirent un générateur HF de 50 kW à 10 MHz et purent ainsi accélérer des ions Hg^+ à 1,26 MeV dans une machine qui comportait 30 tubes.

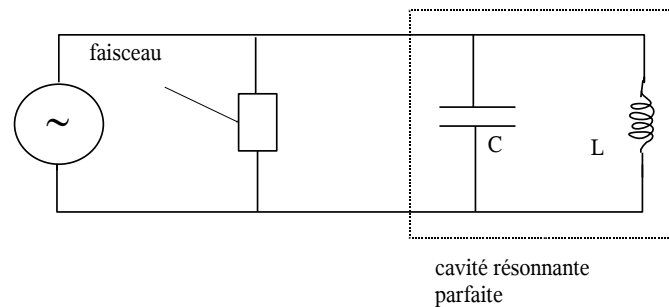
Ce type d'accélérateurs convient principalement pour les ions de basse énergie car ces particules ont un coefficient bêta qui reste petit. Ces machines se rencontrent encore de nos jours comme injecteur dans les accélérateurs d'ions lourds de plus haute énergie.

Pour les électrons, cet accélérateur présente beaucoup d'inconvénients. En effet, pour ces particules, β est rapidement voisin de 1. Par exemple, si β est voisin de 1 et qu'une machine de ce type fonctionne à une fréquence de 100 MHz avec une tension maximale de 100 kV , on doit utiliser des tubes de 15 m de longueur, ce qui conduit à une machine de 150 m de longueur pour un gain de 1 MeV en énergie cinétique. Pour monter en énergie en gardant une longueur raisonnable, il faudrait augmenter la fréquence. À haute fréquence, les tubes à dérive agissent comme des antennes dipolaires rayonnant ainsi énormément d'énergie. La solution consiste alors à enfermer les tubes dans une cavité fermée résonnante dont les murs réfléchissent le rayonnement.

5.2 Cavités résonantes :

Modèle électrique de cavités parfaites :

Nous allons tout d'abord analyser un circuit électrique résonant. Par analogie, cela permettra de comprendre ce qui se passe dans les cavités résonantes.



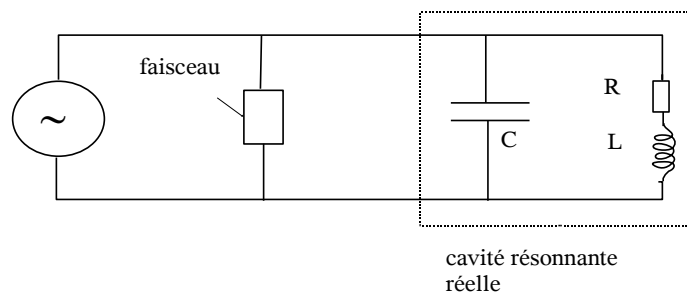
Une cavité résonante parfaite est assimilable à un circuit électrique résonant composé d'une capacité en parallèle sur une self. L'impédance équivalente de ces deux composants en parallèle est donnée par :

$$Z(\omega) = \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right)^{-1} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} , \text{ pour laquelle la fréquence de résonance, obtenue lorsque } |Z(\omega)| \rightarrow +\infty , \text{ est } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

À ω_0 , toute l'énergie est transférée du générateur vers la résistance de charge qui symbolise le faisceau de particules.

Modèle électrique de cavités réelles :

La situation précédente est évidemment idéale et dans la réalité nous rencontrerons plutôt le schéma qui suit :



Dans lequel un composant additionnel R a été ajouté pour tenir compte de la résistance de perte ohmique dans une cavité réelle. Cette fois-ci l'impédance équivalente des deux branches en parallèle symbolisant une cavité s'écrit :

$$Z(\omega) = (j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L})^{-1} = \frac{(j\omega L + R)}{((1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + j\omega RC)} = \frac{(j\omega L + R)(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - j\omega RC)}{((1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\omega RC)^2)}$$

À la fréquence ω_0 , $|Z(\omega_0)|$ est finie. Il y a transfert et perte d'énergie dans cette partie du circuit ; c'est-à-dire dans la cavité. Il faut entretenir la résonance par apport d'énergie qui compensera les pertes ohmiques dans la cavité, ainsi que le transfert d'énergie vers le faisceau.

La largeur de la résonance, déterminée à un cinquième de sa hauteur, est obtenue par l'expression suivante:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\sqrt{L/C}} .$$

Une bonne cavité accélératrice devra avoir une résonance aussi étroite que possible pour se rapprocher du cas idéal sans perte ohmique, ce qui signifie : $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$.

Facteur de qualité d'une cavité résonnante :

On définit le facteur de qualité (Q) du circuit de la cavité résonnante par :

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot \text{Énergie stockée dans la cavité}}{\text{Puissance moyenne dissipée}} = \frac{\pi \cdot \text{Énergie stockée dans la cavité}}{\text{Énergie perdue par demi-cycle}}$$

L'énergie accumulée dans la cavité peut être calculée lorsque le courant dans la branche selfique est maximal:

$$U = \frac{1}{2} L I_0^2 .$$

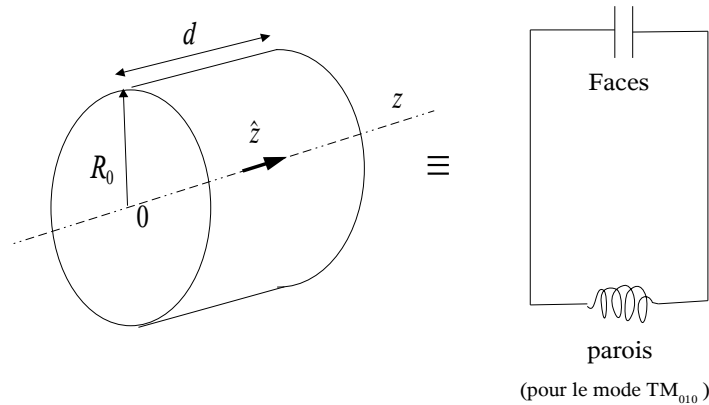
Par ailleurs, la puissance moyenne dissipée dans la résistance de perte est donnée par :

$$\langle P \rangle = \langle i(t)^2 \rangle R = \frac{1}{2} I_0^2 R .$$

Puisque: $Q = \omega_0 \frac{U}{\langle P \rangle}$, on obtient en remplaçant dans cette équation les grandeurs concernées par leurs expressions précédentes : $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = (\Delta\omega/\omega_0)^{-1}$. Pour une bonne cavité on doit obtenir un facteur de qualité très supérieur à 1. À la résonance, l'impédance de la cavité est obtenue par: $|Z(\omega_0)| = \frac{L/C}{R} = \frac{L}{RC} = Q \sqrt{L/C}$ pour une bonne cavité, c'est-à-dire lorsque $Q \gg 1$.

Nous pouvons maintenant passer à l'étude d'une cavité réelle communément rencontrée .

Cavité résonnante cylindrique :



À l'intérieur de la cavité, les équations de propagation des champs électromagnétiques sont :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad v = \frac{c}{(\epsilon \mu / \epsilon_0 \mu_0)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} .$$

Ici nous n'examinerons qu'un sous-ensemble des solutions avec les conditions suivantes (qui présentent un intérêt pour l'accélération) :

- symétrie azimutale: $\partial / \partial \phi = 0$;
- pas de variation longitudinale (onde stationnaire) ;
- pas de composante radiale ;
- variation en temps proportionnelle à $\exp(j \omega t)$.

La solution générale qui satisfait ces conditions est : $\vec{E}(r, t) = E_z(r) \exp(j \omega t) \hat{z}$, d'où :

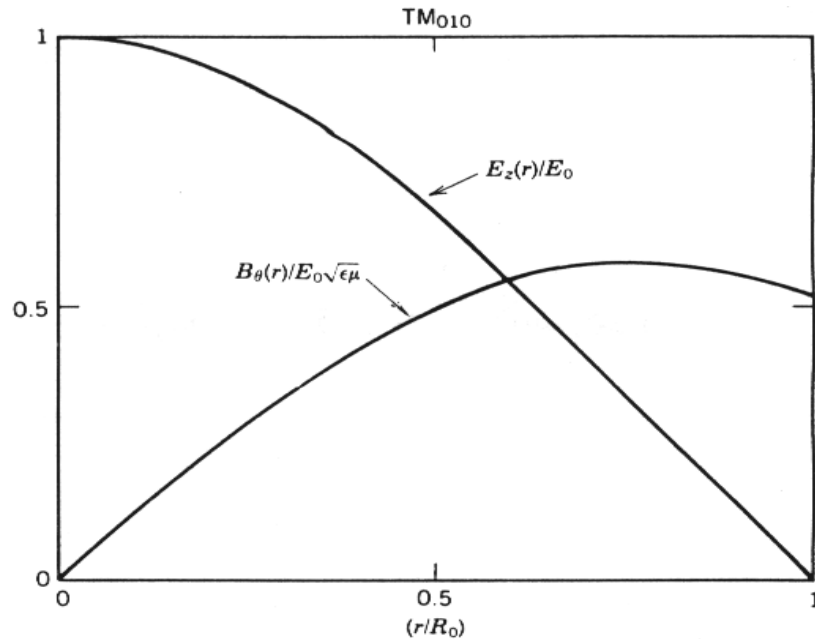
$$\frac{d^2 E_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d E_z(r)}{dr} + \frac{\omega^2}{v^2} E_z(r) = 0$$

Cette équation est une forme particulière de l'équation de Bessel. Si de plus, on a $E_z(r=0) \neq 0$, du fait que l'accélération a lieu sur l'axe (0,z), et $E_z(R_0) = 0$ car le champ est nul sur la paroi, les solutions de cette équation s'expriment alors sous la forme :

$\vec{E}_{zn}(r, t) = E_{on} J_0(k_n r) \exp(j \omega_n t) \hat{z}$ où $J_0(k_n r)$ est la fonction d'ordre 0 de Bessel de 1^{ère} espèce

(car $J_0(0) \neq 0$) et $k_n = \frac{\omega_n}{v} = \omega_n \sqrt{\epsilon \mu}$, $J_0(k_n R_0) = 0$.

Mode de la résonance	k_n	ω_n
TM ₀₁₀	$2,405 / R_0$	$2,405 / \sqrt{\epsilon \mu} R_0$
TM ₀₂₀	$5,52 / R_0$	$5,52 / \sqrt{\epsilon \mu} R_0$
TM ₀₃₀	$8,654 / R_0$	$8,654 / \sqrt{\epsilon \mu} R_0$



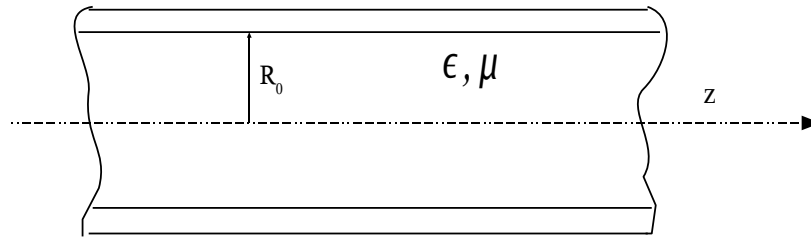
TM signifie mode Transverse Magnétique, TM_{pnq} où p est la périodicité azimutale, n est le nombre de noeuds+1 dans la direction radiale et q la périodicité axiale. ω_n et k_n ne dépendent que de R_0 pour les modes TM_{0n0}. Les pertes ohmiques se produisent dans les parois où les courants sont grands. Le facteur de qualité d'une cavité cylindrique fonctionnant dans le mode TM₀₁₀ est obtenu à partir de l'expression suivante: $Q = \frac{d/\delta}{1+d/R_0}$ où δ est la profondeur de peau (à haute fréquence le courant ne circule qu'en surface sur une profondeur δ). δ dépend de la fréquence et du matériau de la paroi. Pour le cuivre à $F = 1$ GHz, $\delta = 2 \mu\text{m}$. Pour maintenir Q suffisamment haut, il faut polir la surface de la cavité à mieux que δ !

Pour $R_0 = 11,5$ cm ; $d = 4$ cm et $F_1 = 1$ GHz, on a :

$$Q = 1,5 \cdot 10^4, \quad \Delta F_1 / F_1 = 1/Q = 6,7 \cdot 10^{-5}, \quad \Delta F_1 = \pm 67 \text{ kHz}$$

5.3 Guides d'ondes :

Les cavités résonnantes ont une dimension axiale finie. Leurs parois réfléchissent les ondes électromagnétiques internes et donnent ainsi naissance à des ondes stationnaires. Dans ce paragraphe, nous allons examiner les cavités sans limite axiale. Les ondes électromagnétiques s'y propagent. Ce sont ce que l'on appelle des guides d'ondes. Les guides d'ondes qui nous intéressent ici ont des parois latérales métalliques. Et nous nous concentrerons sur le guide d'onde cylindrique qui est simplement un tube creux. Les guides d'ondes sont utilisés soit pour l'alimentation des cavités, soit pour l'accélération continue de particules.



Il y a une infinité de modes de propagation possibles, mais nous allons nous restreindre ici à l'étude des modes donnant naissance à des champs à symétrie azimutale: $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$; c'est à dire :

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, z, t) &= \vec{E}(r) \exp(j(\omega t - kz)) \\ \vec{B}(r, z, t) &= \vec{B}(r) \exp(j(\omega t - kz)) \end{aligned}$$

L'onde se propage à la vitesse (de phase) $v = \omega / k$ dans le sens $(0, z)$.

À l'intérieur du guide, les équations de Maxwell sont:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{car il n'y a ni charge ni courant source})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -j\omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= j\omega \epsilon \mu \vec{E} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad k_0 = \sqrt{\epsilon \mu} \omega = \frac{\omega}{c}, \quad c \text{ étant la vitesse de la lumière dans le guide d'onde.}$$

En utilisant la formule suivante de l'analyse vectorielle:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad \text{avec} \quad \nabla^2 \vec{F} = \nabla^2 F_1 \vec{i} + \nabla^2 F_2 \vec{j} + \nabla^2 F_3 \vec{k},$$

on obtient:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{B} &= \omega^2 \epsilon \mu \vec{B} \Rightarrow \nabla^2 \vec{B} = -k_0^2 \vec{B} \\ -\nabla^2 \vec{E} &= \omega^2 \epsilon \mu \vec{E} \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = -k_0^2 \vec{E} \end{aligned} \quad \text{qui sont les équations de propagation.}$$

En développant les équations de Maxwell qui couplent \vec{E} à \vec{B} et vice versa, on obtient:

$$\begin{aligned} jk E_\phi &= -j\omega B_r & jk B_\phi &= j(k_0^2 / \omega) E_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) &= -j\omega B_z & \text{et} & \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) = j(k_0^2 / \omega) E_z \\ -jk E_r - \frac{\partial}{\partial r} (E_z) &= -j\omega B_\phi & -jk B_r - \frac{\partial}{\partial r} (B_z) &= j(k_0^2 / \omega) E_\phi \end{aligned}$$

Rappel de l'expression du rotationnel d'un vecteur en coordonnées cylindriques:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_z & \vec{e}_r & \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ F_z & F_r & rF_\phi \end{vmatrix}$$

On remanie ces relations de telle façon à faire apparaître les couplages entre les champs transverses et les dérivées radiales des composantes longitudinales:

$$\begin{aligned} B_r &= -jk \frac{\partial}{\partial r} (B_z) / (k_0^2 - k^2) \\ E_r &= -jk \frac{\partial}{\partial r} (E_z) / (k_0^2 - k^2) \\ B_\phi &= -j(k_0^2 / \omega) \frac{\partial}{\partial r} (E_z) / (k_0^2 - k^2) \\ E_\phi &= j\omega \frac{\partial}{\partial r} (B_z) / (k_0^2 - k^2) \end{aligned}$$

Il existe deux types d'ondes qui peuvent se propager dans les conditions précédentes :

$$\text{transverses électriques TE : c'est à dire } E_z = 0 \Rightarrow E_r = B_\phi = 0$$

$$\text{transverses magnétiques TM : c'est à dire } B_z = 0 \Rightarrow E_\phi = B_r = 0$$

La classe d'ondes qui a un intérêt pour l'accélération de particules doit présenter une composante longitudinale de champ électrique non-nul. Ce sont donc des ondes Transverses Magnétiques. Pour les ondes TM_{0n} , les composantes transverses sont E_r et B_ϕ et la condition aux limites est: $E_z(R_0) = 0$. On utilise l'équation de propagation pour déterminer E_z : (une fois E_z obtenue, B_ϕ est calculée en dérivant E_z par rapport à r)

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_z &= -k_0^2 E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = -k^2 E_z + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} \\ \text{soit } \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} &= (k^2 - k_0^2) E_z \end{aligned}$$

On retrouve la forme spéciale de l'équation de Bessel qui admet pour solution:

$$\begin{aligned} E_z(r, z, t) &= E_0 J_0(\sqrt{(k_0^2 - k^2)} r) \exp(j(\omega t - k z)) \text{ avec} \\ k_0^2 - k^2 &= x_n^2 / R_0^2 \quad (x_n \in \{2,405; 5,52; 8,65\dots\}) \text{ et } k = (\epsilon \mu \omega^2 - x_n^2 / R_0^2)^{1/2}, \text{ qui est la relation de} \\ &\text{dispersion pour les modes } TM_{0n}. \end{aligned}$$

Si k est imaginaire, il n'y a pas de propagation. Il existe donc une fréquence de coupure en-dessous de laquelle les ondes ne se propagent pas:

$$\epsilon \mu \omega_c^2 = x_1^2 / R_0^2 \Rightarrow \omega_c = \frac{2,405}{\sqrt{\epsilon \mu} R_0}.$$

À ω_c , la longueur d'onde ($\lambda = 2\pi/k$) dans le guide est infinie. La longueur d'onde, à l'extérieur d'un guide, d'une onde à ω_c est donnée par: $\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 2\pi c / \omega_c \simeq 2,61 R_0$, pour le mode TM_{01} .

Dans le guide la longueur d'onde de ce mode, pour une fréquence ω donnée, est:
 $\lambda = \lambda_0 / (1 - \omega_c^2 / \omega^2)^{1/2}$ où λ_0 est la longueur d'onde de ce mode à l'extérieur du guide, soit
 $\lambda_0 = 2\pi / \sqrt{(\epsilon \mu)} \omega$.

La vitesse de phase est $v = \omega / k$, soit:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{1 - (\omega_c / \omega)^2}}, \text{ ce qui conduit à } v > c \text{ !}$$

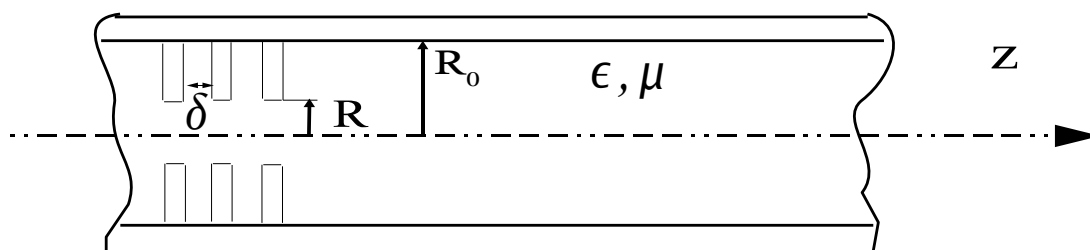
Si $\frac{2,405}{\sqrt{\epsilon \mu} R_0} \leq \omega \leq \frac{5,52}{\sqrt{\epsilon \mu} R_0} \Rightarrow$ seul TM_{01} peut être excité, c'est ce que l'on recherche en général.

La vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique (donc du signal) est ce que l'on appelle la vitesse de groupe V_g : $V_g = \frac{d\omega}{dk}$, $k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_c^2) \Rightarrow \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{d\omega}{dk} = v_g \Rightarrow c \cdot \frac{c}{v} < c$ car $v > c$

Pour l'accélération de particules, c'est la vitesse de phase qui va déterminer la forme du champ électrique. Afin que ces particules accélérées restent en phase avec ce champ, c'est-à-dire pour qu'elles sentent toujours le même champ, il faudrait que la vitesse de phase de l'onde soit la même que la vitesse des particules qui est nécessairement inférieure à c . Ce n'est pas le cas. Il apparaît donc nécessaire de modifier la forme de ces guides d'ondes pour ralentir la vitesse de phase.

On peut aisément prouver par un raisonnement relativiste qu'un guide d'onde cylindrique lisse ne peut pas transmettre une onde ayant une vitesse de phase plus petite que c . En effet, si une onde se propage avec une vitesse de phase inférieure à la vitesse de la lumière on peut toujours faire une transformation de Lorentz pour se placer dans un repère se déplaçant à cette vitesse. Dans ce repère, le guide est le même. Or le premier principe de la relativité stipule que les lois physiques sont les mêmes dans tout repère non accéléré. Les résultats obtenus dans le repère se déplaçant à la vitesse de phase sont donc les mêmes que ceux auxquels on aboutit dans le repère au repos (car l'aspect du guide ne change pas). Or le champ électrique est statique dans le repère en mouvement ce qui implique que le champ magnétique est nul. Le champ électrique doit donc nécessairement dériver d'un potentiel ce qui est incompatible avec le fait que le tube métallique est à un potentiel constant. La seule solution est $\vec{E} = 0$ ce qui est contraire à l'observation ; par conséquent la vitesse de phase dans un guide d'onde cylindrique et lisse doit être supérieure à la vitesse de la lumière.

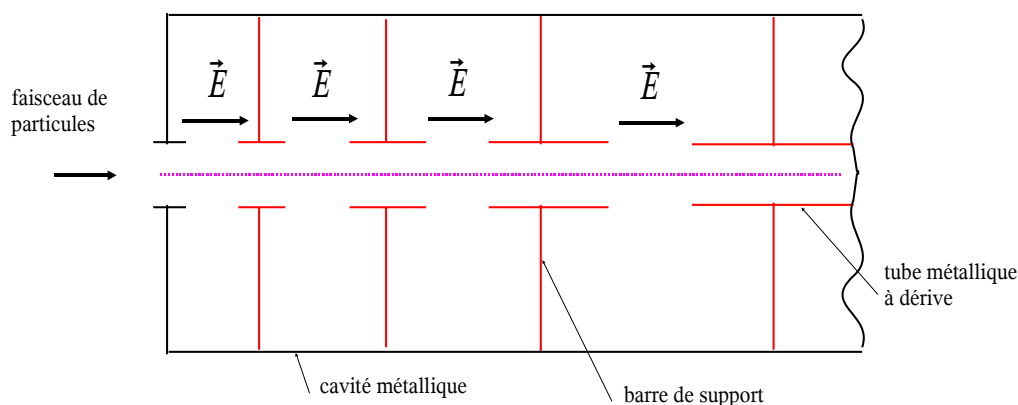
Pour briser ce raisonnement, il faut que le tube ait une forme différente dans le repère transformé de Lorentz. On lui donne une structure périodique. Ainsi la contraction des distances longitudinales va modifier cette forme et le raisonnement du paragraphe précédent n'est plus applicable. Le guide d'onde est doté d'iris selon le dessin suivant:



avec les conditions suivantes $R \ll R_0$ et $\lambda < \delta$ - L'insertion de ces iris crée une séquence de cavités résonnantes couplées électromagnétiquement en leurs centres. Cet arrangement agit comme un filtre passe-bande. Par le choix des dimensions, la bande passante ainsi que la vitesse de phase souhaitée peuvent être sélectionnées. Pour les électrons, la vitesse de phase est ajustée sur la vitesse de la lumière.

5.4 Linac d'Alvarez :

Les tubes à dérive sont placés à l'intérieur d'une cavité cylindrique résonnante dans le mode TM_{010} .



C'est un linac du type $\beta\lambda$ car les longueurs des tubes à dérive doivent satisfaire:

$$L_n = v_n (2\pi / \omega) = \beta_n \lambda \quad \text{où} \quad \beta_n = v_n / c, \quad v_n \text{ étant la vitesse des particules à l'entrée du tube } n \text{ et}$$

$$\lambda \text{ la longueur d'onde HF.}$$

Les tubes métalliques peuvent contenir des quadripôles magnétiques de focalisation. Les alimentations de ces aimants sont réalisées à travers les barres de support. Les tubes à dérive peuvent être équipés de barres de couplage orthogonales aux barres de support qui ont pour rôle d'éliminer les modes parasites dangereux tels que : TE.

Exemple de linac d'Alvarez : l'accélérateur linéaire de LAMPF

Paramètres de l'accélérateur de LAMPF

Longueur totale	800 m
Particules	protons
Énergie totale	800 MeV
Courant crête à la sortie	15 mA
Taux de répétition	120 Hz
Durée d'un train	1 ms
Cycle utile	12%

Injecteur

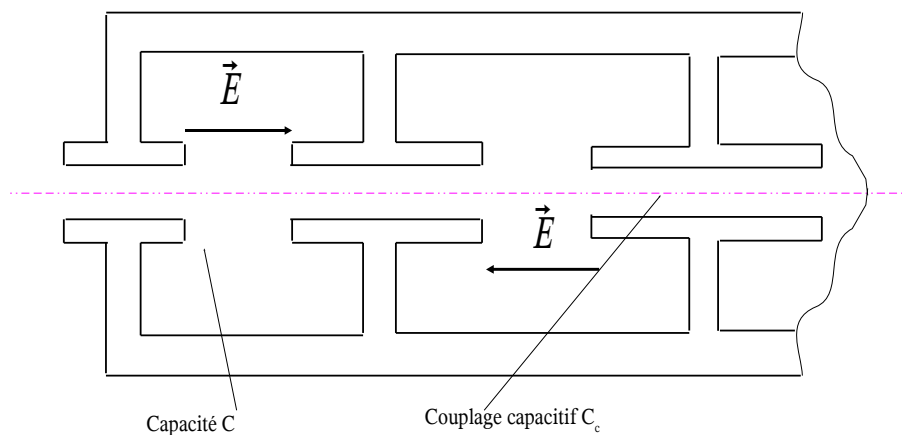
ions	H ⁺ ou H ⁻
tension	750 kV
générateur	Cockroft-Walton

Linac d'Alvarez

Variation d'énergie	0,75 - 100 MeV
Longueur	61,7 m
Fréquence	201,25 MHz
Q des cavités	5 10 ⁴
Diamètre	0,9 m
Nombre de tubes à dérives	165
Champ axial	1,6 - 2,4 MV/m au pic
Phase de synchronisation	64°
nombre de quadripôles	135
Gradient de focalisation	8 - 0,8 kG/cm

5.5 Linac à cavités résonnantes couplées :

Pour un champ électrique de crête donné qui se trouve limité par la tension de rupture, un linac $\beta\lambda$ procure un gradient d'accélération moyen deux fois moindre qu'un linac $\frac{1}{2}\beta\lambda$. Ainsi pour atteindre une énergie donnée et compte tenu du fait que le choix de la fréquence HF est restreint (contrainte imposée par la technologie des tubes HF), un linac du type $\frac{1}{2}\beta\lambda$ est deux fois plus court qu'un linac du type $\beta\lambda$. Les linacs du type $\frac{1}{2}\beta\lambda$ utilisent des cavités résonnantes couplées:

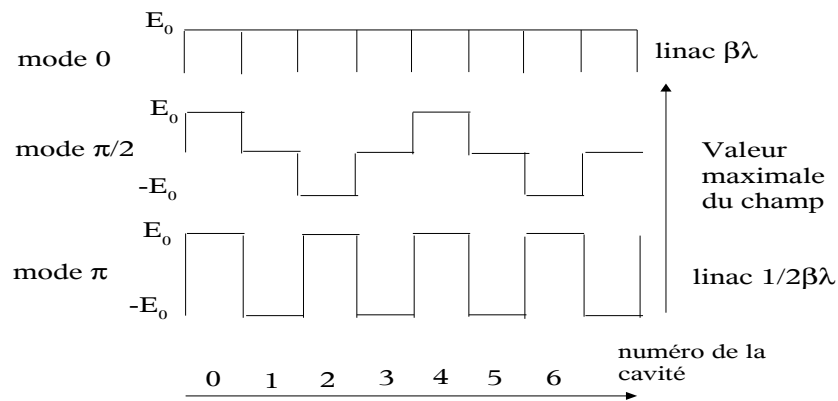


La longueur du $n^{\text{ième}}$ tube doit satisfaire: $L_n = \frac{1}{2} v_n T = \frac{1}{2} \beta_n \lambda$. On peut montrer qu'un système de N cavités couplées possède N modes résonnants dont les fréquences sont obtenues par :

$f_n = \Omega_n \omega_0 / 2\pi$ avec $\Omega_m = \left[1 - 2K(1 - \cos(2\pi m/N)) \right]^{\frac{1}{2}}$, $K =$ constante de couplage (C_c/C si le couplage est au centre de la cavité, en général $K \ll 1$), $m = 0, 1, 2, 3, 4 \dots N-1$ et $\omega_0 =$ fréquence de résonance des cavités lorsqu'elles ne sont pas couplées. On peut également prouver que dans ces modes, les amplitudes maximales des champs électriques suivent la loi suivante :

$$E_n = E_0 \cos(n\mu) \text{ avec } n \text{ étant l'indice de la } n^{\text{ième}} \text{ cavité et } \mu = \pi m / (N-1).$$

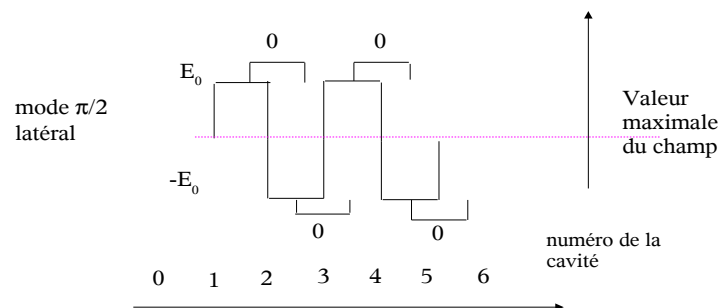
Graphiquement, les valeurs maximales des champs électriques dans les diverses cavités peuvent être représentées de la façon suivante :



En couplant plusieurs cavités, on cherche également à n'utiliser qu'un seul point d'alimentation HF. Il faut donc que le transfert d'énergie entre cavités puisse s'accomplir aisément. Le transfert d'énergie électromagnétique est régulé par la vitesse de groupe. Pour notre étude, on peut montrer que:

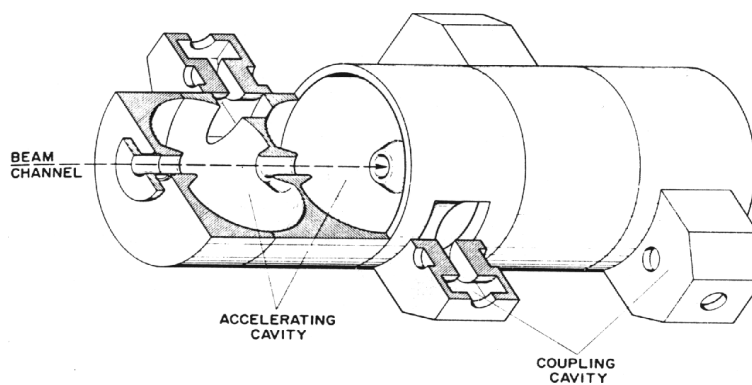
$$V_g = -(\omega_0 d) \frac{\sin \mu}{(1 - 2K (1 - \cos \mu))^{1/2}}$$

ce qui donne une vitesse de groupe nulle pour les modes 0 et \$\pi\$, et au contraire une valeur maximale pour le mode \$\pi/2\$. Ce dernier mode est celui qui est utilisé, mais pour éviter de perdre un facteur deux dans le gradient moyen d'accélération, les cavités de couplage à champ nul sont déportées sur le côté conformément au schéma de principe suivant:



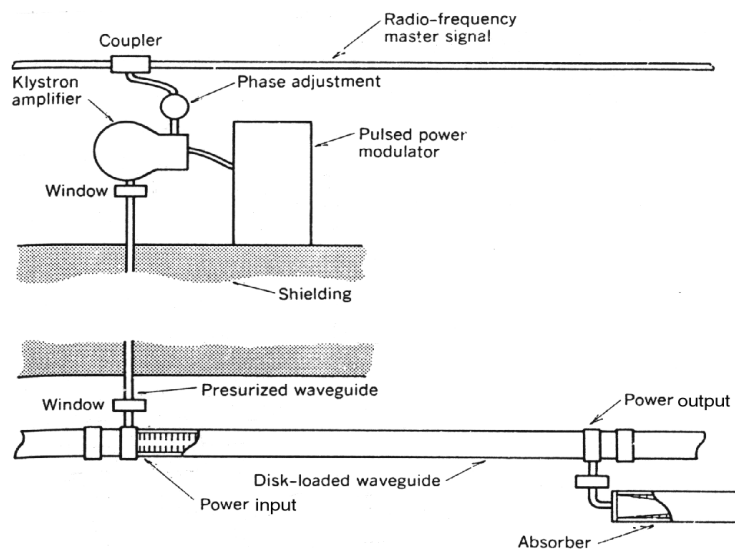
Linac à couplage latéral de LAMPF

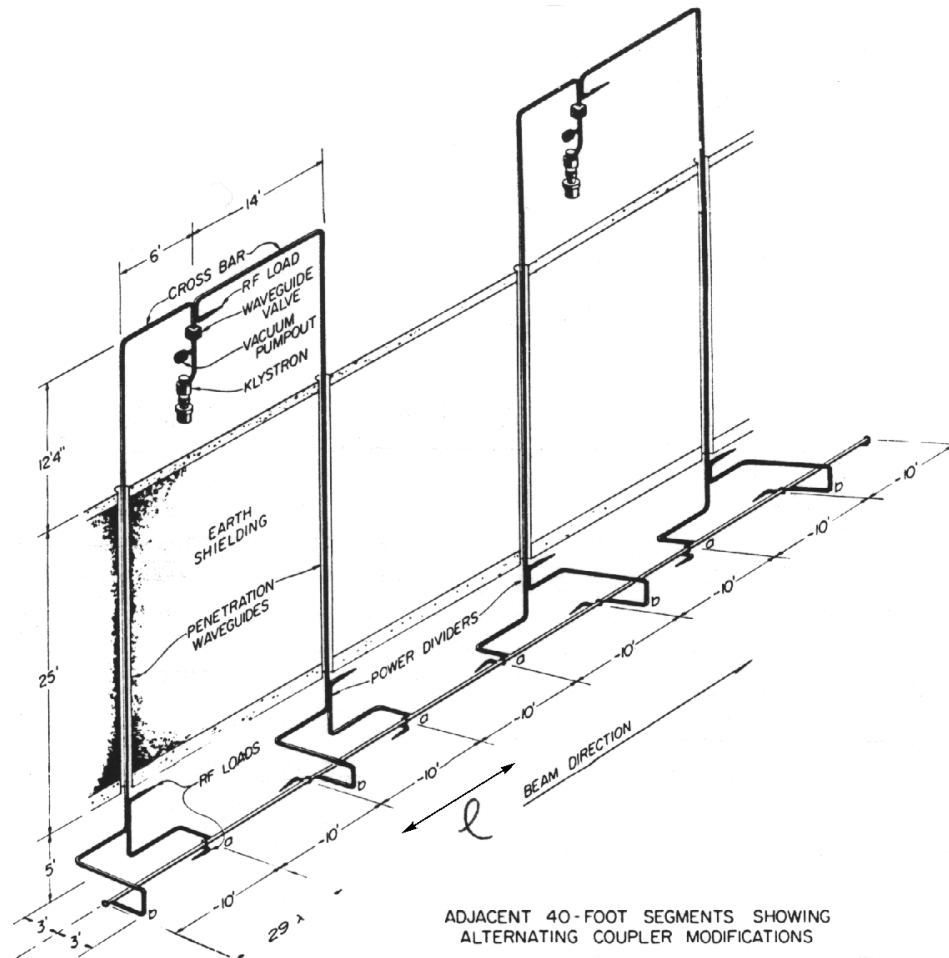
Variation d'énergie	100 - 800 MeV
Longueur	726,9 m
Fréquence des cavités	805 MHz (4 x fréquence du linac d'Alvarez)
Nombre de cavités	5000
Champ axial	1,1 MV/m
Phase de synchronisation	64 - 70°
Nombre de quadripôles	204



5.6 Les linacs pour électrons de haute énergie :

Étant donné que les électrons sont des particules qui atteignent rapidement la vitesse de la lumière, les structures qui semblent les plus adaptées à leur accélération sont les guides d'ondes à haute fréquence. Les figures ci-dessous présentent la disposition générale d'une telle machine:





Nous allons brièvement étudier l'optimisation énergétique d'un linac à électrons. Nous noterons :

- l : la longueur de chaque section indépendamment alimentée ;
- L: la longueur totale de la machine
- P_i: la puissance totale disponible

Par analogie avec les cavités résonnantes , le facteur de qualité Q pour les guides d'ondes caractérise les pertes thermiques dans les parois selon :

$$Q = \frac{U \omega}{(-dP/dz)}$$

où :

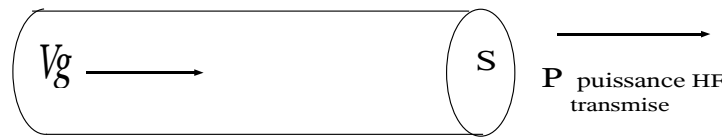
$\frac{dP}{dz}$ est la puissance dissipée par unité de longueur ,

U est l'énergie électromagnétique stockée dans le guide par unité de longueur,

ω est la pulsation de l'onde se propageant dans le guide .

D'autre part, nous savons que la vitesse de groupe v_g de l'onde transmise n'est rien d'autre que la vitesse de transfert de l'énergie HF le long du guide. En fait, v_g peut s'écrire sous la forme suivante:

$$v_g = \frac{\text{Flux d'énergie} \times S}{\text{Densité d'énergie électromagnétique} \times S}$$



$U V_g = P$, le transfert d'énergie s'effectue à la vitesse V_g , d'où $U = \frac{P}{V_g}$, ce qui donne :

$$-\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{\omega}{Q V_g}\right) P .$$

On en tire : $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{\omega z}{Q v_g}\right)$.

Par ailleurs, la puissance transportée par une onde électromagnétique peut être calculée à partir du vecteur de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$.

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{A} .$$

Lorsqu'il s'agit d'une onde TM_{01} , on peut montrer que: $|\vec{S}| \propto E_{zmax}^2$, (l'amplitude maximale du champ électrique axial). On a donc: $P(z) \propto E_{zmax}^2(z)$ d'où :

$E_{zmax}(z) = E_{z0} \exp\left(-\frac{\omega}{2 Q v_g} z\right) = E_{z0} \exp(-z/l_0)$ avec $l_0 = \frac{2 Q v_g}{\omega}$. L'amplitude maximale du champ électrique est atténuée exponentiellement le long du guide.

Le gain d'énergie maximal d'un électron dans une section de longueur l du guide est :

$$\Delta E_{cin} = e \int_0^l E_{zmax}(z) dz = e E_{z0} l_0 (1 - \exp(-l/l_0)) ,$$

ce qui pour l'accélérateur complet conduit à :

$$E_{cin}^{tot} = \left(\frac{L}{l}\right) \Delta E_{cin} = e E_{z0} \frac{L \cdot l_0}{l} (1 - \exp(-l/l_0)) .$$

La recherche de l'optimum pour l doit tenir compte du fait que la puissance HF totale est limitée. Soit P_t la puissance HF totale disponible. La puissance disponible par section est:

$$\Delta P = \frac{P_t \cdot l}{L} ,$$

et puisque E_{z0}^2 est proportionnelle à la puissance HF disponible par section, on obtient :

$$E_{z0} \propto l^{1/2} \text{ (à puissance totale et longueur totale fixes) , soit encore ,}$$

$$E_{cin}^{tot} \propto \frac{(1 - \exp(-l/l_0))}{\sqrt{(l/l_0)}}$$

E_{cin}^{tot} est maximale pour l/l_0 située au voisinage de 1. (Pour l'accélérateur linéaire de Stanford, $l_0 = 3$ m, 6 MW sont disponibles par section, soit une perte de 5,2 MW par section ou encore 1,7 MW/m de guide d'onde)

Impédance shunt :

Cette quantité est un facteur de mérite pour les accélérateurs linéaires à électrons. Elle est définie par la relation suivante:

$$P_p^t = \frac{V_0^2}{R_s L} ,$$

où:

R_s est l'impédance shunt de l'accélérateur ;

P_p^t est la puissance HF totale dissipée dans les parois des cavités ;

V_0 est la différence de potentiel totale ($\frac{E_{cin}^{tot}}{e}$) ;

L est la longueur totale de la structure accélératrice .

On peut constater que : $[R_s L] = \Omega$ et donc , $[R_s] = \Omega / m$.

Pour les accélérateurs actuels , $25 M \Omega / m \leq R_s \leq 50 M \Omega / m$

On peut également définir l'efficacité d'un linac par :

$$\eta = \frac{R_s L}{(Z_f + R_s L)} ,$$

où :

Z_f est l'impédance du faisceau , $Z_f = \frac{V_0}{i_f}$,

i_f est le courant du faisceau .

Exemple :

L'énergie totale délivrée par un accélérateur d'électrons est de 2,5 GeV. L'impédance shunt est de 50 M Ω /m pour un gradient moyen d'accélération de 8 MV/m. La longueur totale de cet accélérateur est de 312 m. Sa puissance totale dissipée est: $\frac{2,5^2 \cdot 10^{18}}{50 \cdot 10^6 \times 312} = 400 MW$! Ce chiffre indique clairement que les linacs à électrons qui utilisent des cavités résistives ne peuvent avoir qu'un cycle utile très faible de l'ordre de 0,1 %.

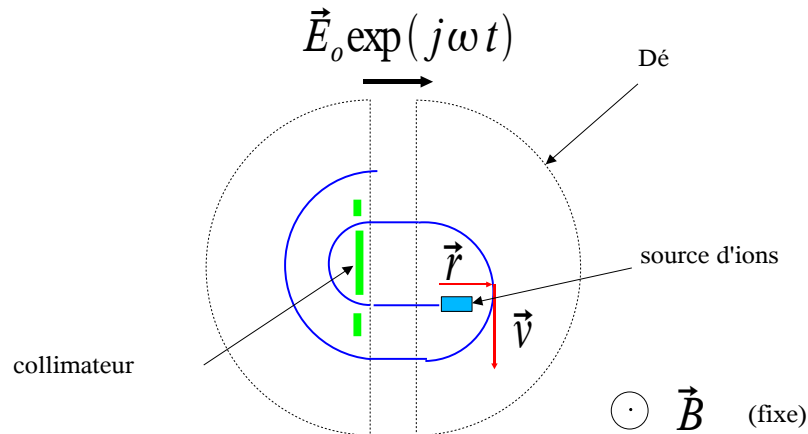
On comprend aisément l'intérêt du développement de cavités supraconductrices qui permettent de réduire notablement les pertes thermiques. De plus, nous avons vu que $P_{HF} \propto E_{z0}^2$. La mise au point de guides supraconducteurs semble donc s'imposer pour accroître les gradients d'accélération afin de construire les

prochains linacs à électrons. Ces guides sont incontournables dans les machines à électrons à cycle continu (CW).

6 Accélérateurs circulaires

6.1 Cyclotron à champ uniforme :

Le principe de fonctionnement d'un cyclotron à champ uniforme est indiqué dans la figure qui suit:



Pour un ion de masse m_0 , de charge q (positive), l'équilibre de la force centrifuge et de la force de Laplace conduit à écrire:

$$\gamma m_0 \frac{v^2}{r} = |q| v B$$

$$\gamma m_0 \frac{v}{r} = |q| B \quad \text{avec } v = \omega r$$

$$\gamma m_0 \omega = |q| B$$

$$\text{soit : } \omega = \frac{|q| B}{\gamma m_0}$$

Pour des ions non-relativistes ($v \ll c$, $\gamma \simeq 1$), ω (la fréquence gyromagnétique ou cyclotron) ne dépend pas de l'énergie des particules. Le champ accélérateur est délivré par une cavité résonnante à la fréquence ω (fixe):

$$f_{HF} = \frac{|q| B}{2 \pi \gamma m_0} \simeq 15,2 B(T) \frac{Z}{A} (\text{MHz})$$

où:

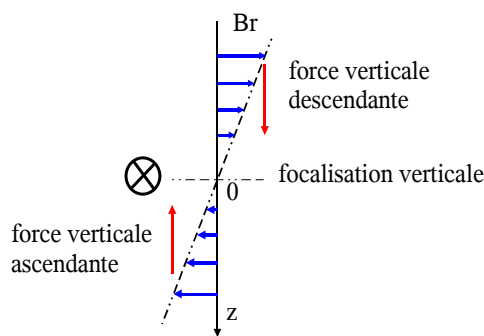
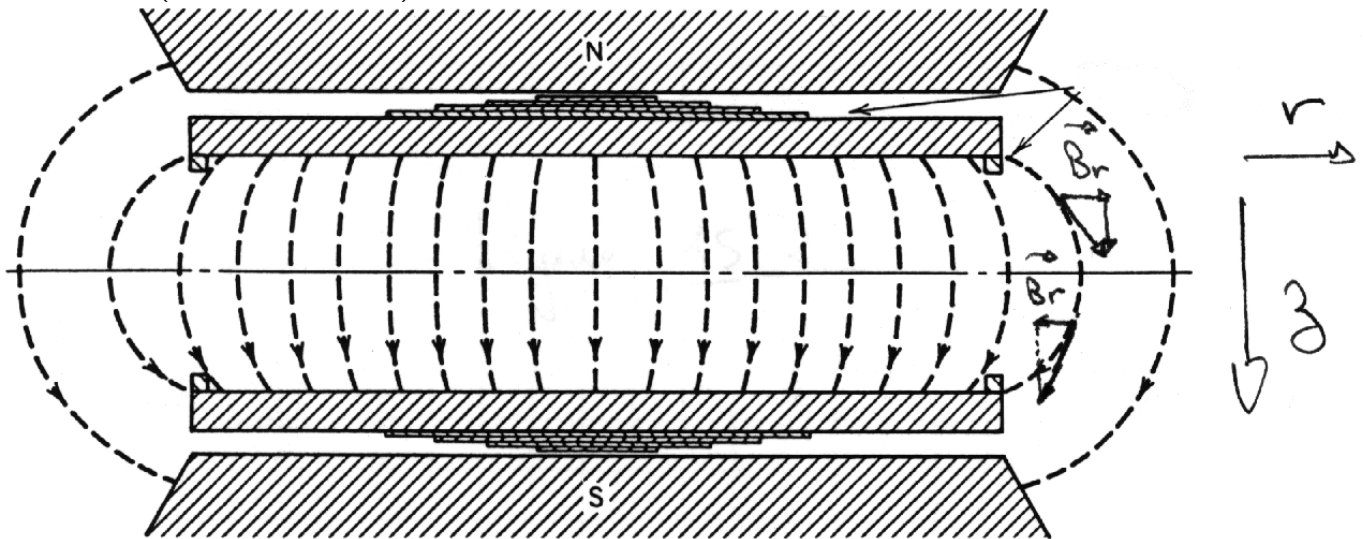
Z est l'état de charge des ions

A est le nombre atomique des ions

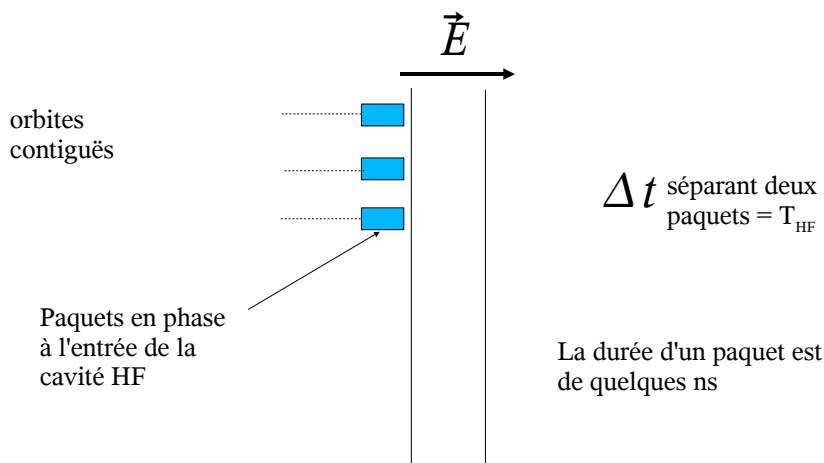
Un cyclotron qui aurait un champ vertical parfaitement uniforme et sans variation radiale ne pourrait pas assurer de focalisation verticale du faisceau. De ce fait, les aimants des cyclotrons à champ uniforme sont conçus pour développer un champ vertical qui décroît en fonction du rayon.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\frac{\partial B_r}{\partial z} .$$

Une variation radiale du champ vertical crée une variation verticale du champ radial qui assure la focalisation (focalisation faible)



L'espacement temporel entre les paquets d'ions est imposé par la fréquence HF, tel que le montre le schéma suivant:



6.2 Synchrocyclotron :

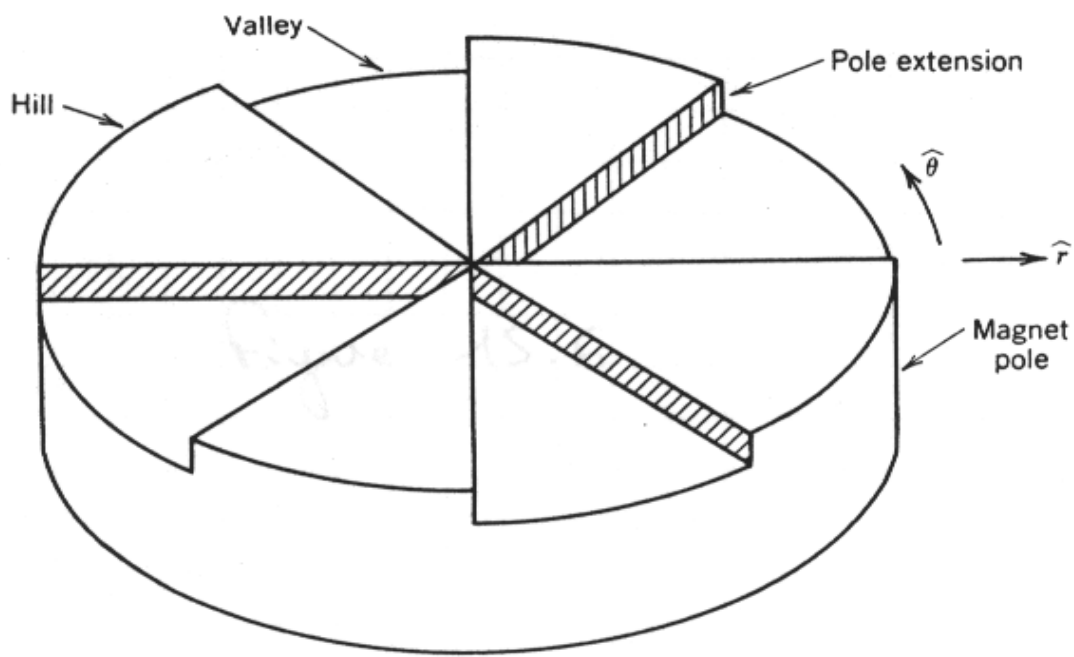
Pour des ions légers de plus haute énergie (ex: proton de 600 MeV), le facteur relativiste γ s'écarte sensiblement de 1. Un synchrocyclotron marche sur le même principe qu'un cyclotron mais la fréquence ω est ralentie durant le cycle d'accélération:

$$\omega = \frac{|q|B}{\gamma m_0}$$

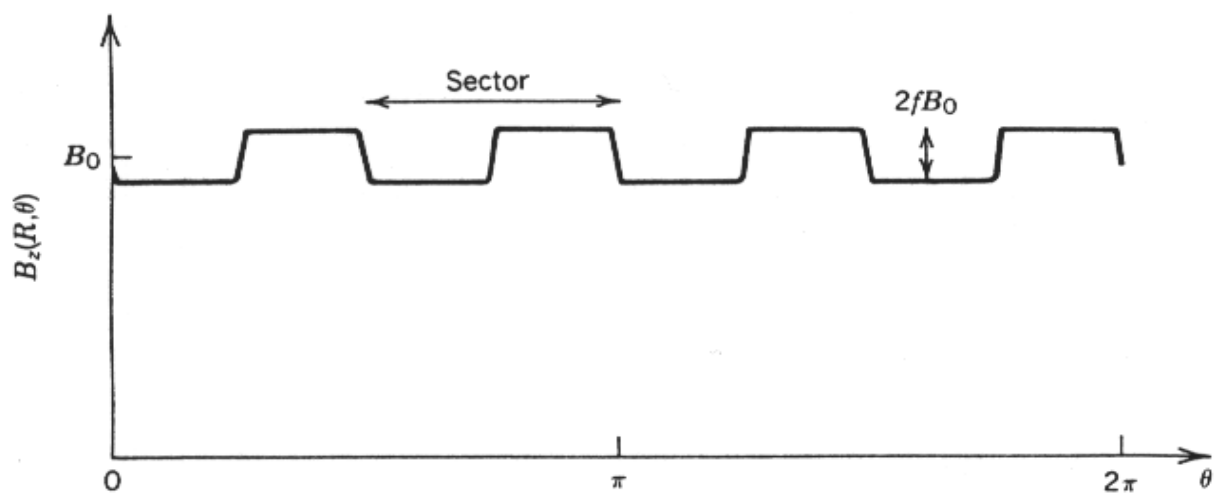
Durant tout le cycle d'accélération, la machine ne peut accepter qu'un seul paquet d'ions. L'intensité des faisceaux délivrés par un synchrocyclotron est donc beaucoup plus faible.

6.3 Cyclotrons isochrones à champ variable en azimuth :

Les cyclotrons modernes utilisent des aimants à champs variables qui permettent de rendre isochrones les orbites des particules. Leur fréquence HF est fixe. Ce sont donc des machines à forts courants. Le champ vertical qui croît en fonction du rayon pour limiter la circonférence de l'orbite, crée un champ radial défocalisant dans la direction verticale. La focalisation verticale de ces machines est obtenue en faisant varier brutalement le champ dans la direction azimuthale par l'emploi de secteurs dont la faces font un angle différent de $\pi/2$ par rapport à l'orbite du faisceau (focalisation de bord). Au voisinage extérieur des faces de ces secteurs, le champ magnétique comporte une composante qui est perpendiculaire au plan défini par les faces (voir figure du champ dipolaire du paragraphe 6.1). Cette composante possède une symétrie autour de l'orbite centrale du faisceau. Si ces faces font un angle différent de $\pi/2$ par rapport à l'orbite du faisceau, cette composante du champ a une projection radiale qui focalise dans le plan vertical.

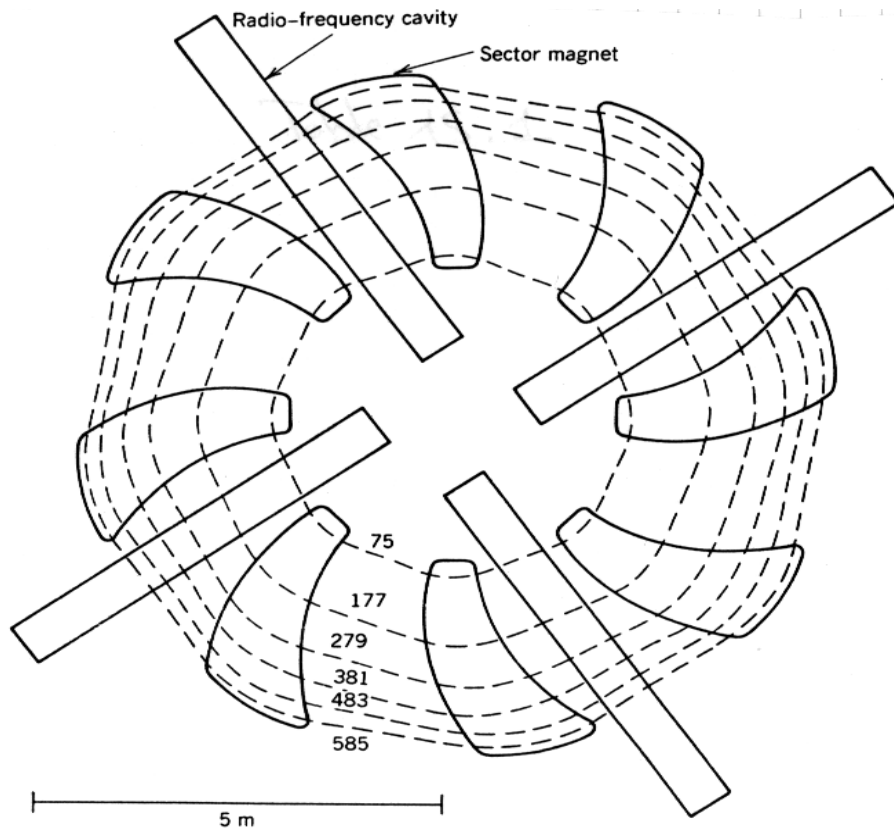
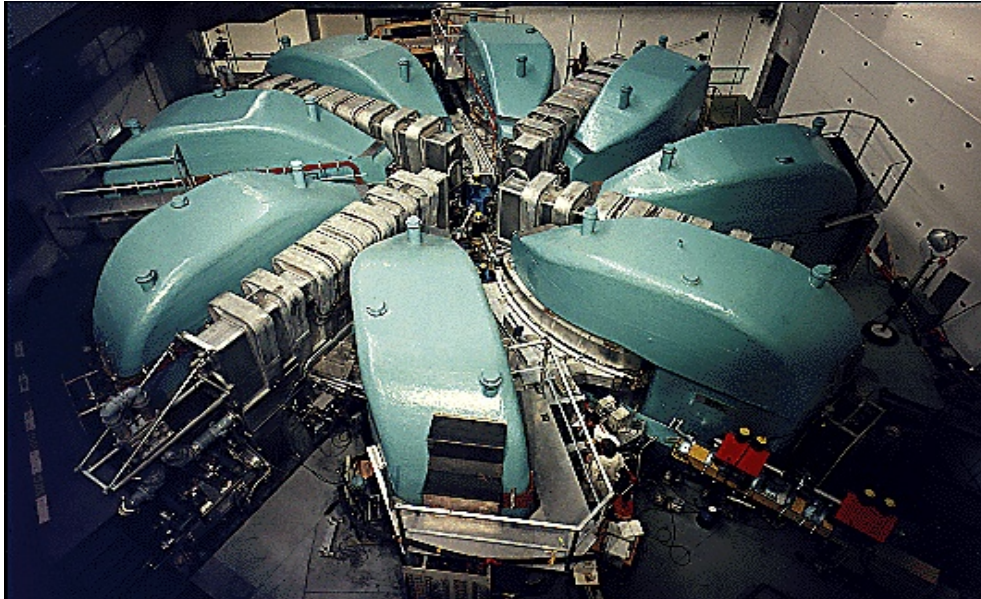


(a)



(b)

Cyclotron de 590 MeV de PSI à Zurich



Cyclotron à secteurs séparés de 590 MeV

rayon d'injection	210 cm
rayon d'extraction	445 cm
champ magnétique max.	2 T
nombre de secteurs	8
courant extrait	1,6 mA (DC)
nombre de cavités d'accélération	4
gain max. par tour	2,4 MeV / tour
fréquence HF	50,63 MHz
durée d'un paquet	0,3 ns

6.4 Synchrotrons :

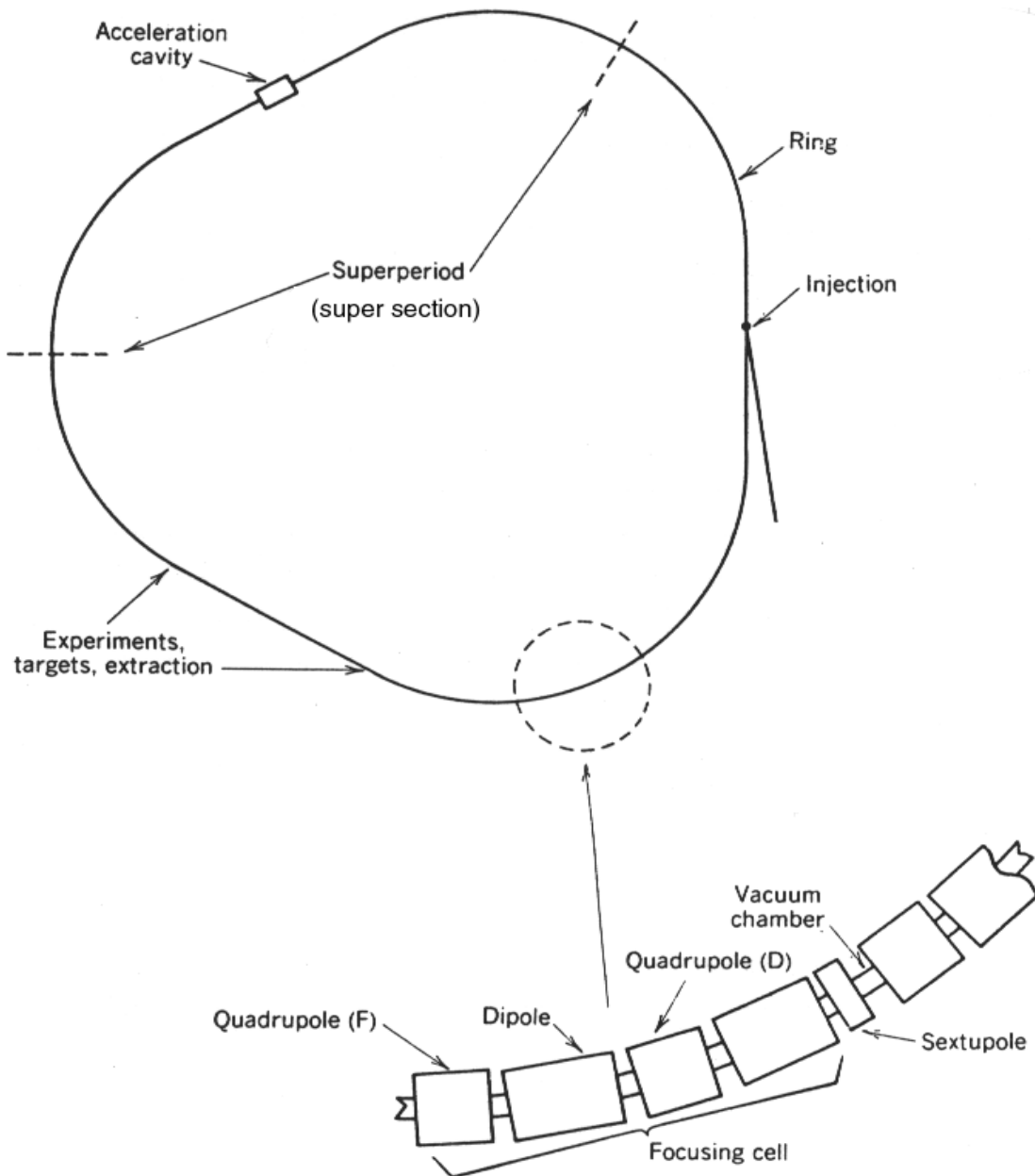
Actuellement, les synchrotrons sont les accélérateurs qui permettent d'atteindre les énergies les plus élevées dans le centre de masse des collisions hadroniques ou leptoniques. Pour les collisionneurs e^+e^- tel que LEP, il est bien probable que l'énergie maximale ait été atteinte du fait de l'énorme puissance dissipée par rayonnement synchrotron (17 MW pour LEP200). Seuls les collisionneurs à deux linacs séparés permettraient d'envisager une augmentation de l'énergie disponible dans des collisions e^+e^- au delà de 200 GeV. Cela passe par le développement de guides d'ondes appropriés à forts gradients d'accélération (20 - 40 MV/m) et faibles pertes thermiques (Q très élevé). Une autre piste qui n'en est qu'à un stade de développement conceptuel serait le remplacement des électrons par des muons (200 fois plus lourds, $16 \cdot 10^8$ fois moins radiatifs).

Pour les protons, le rayonnement synchrotron ne constitue pas la limitation dans la course aux hautes énergies. Celle-ci provient du champ magnétique maximal atteint dans les aimants supraconducteurs actuels (environ 9 T).

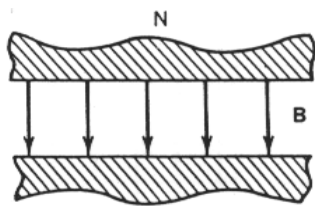
Au-dessus d'un diamètre de 4 m, les aimants monolithiques des synchrocyclotrons sont technologiquement et économiquement inaccessibles (la situation est similaire pour les cyclotrons à secteurs séparés). Or pour des protons de 1 TeV maintenus sur orbite par un champ de 4,2 T, le rayon de courbure gyromagnétique est de 790 m (Tevatron de FNAL aux USA) !

La solution consiste à produire le champ magnétique requis localement sur l'orbite des particules à l'aide de dipôles placés autour du tube à vide du faisceau. L'orbite de la machine devient donc fixe et le champ magnétique de courbure variable. Nous verrons également que cela conduit à une fréquence HF accélératrice variable. La disposition conceptuelle d'un synchrotron est donnée dans la figure qui suit :

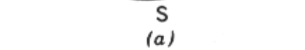
Synchrotron à fonctions séparées



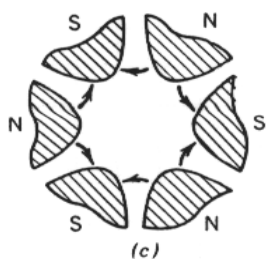
Une cellule de focalisation (ou confinement) est constituée de :



dipôles assurant le maintien sur orbite



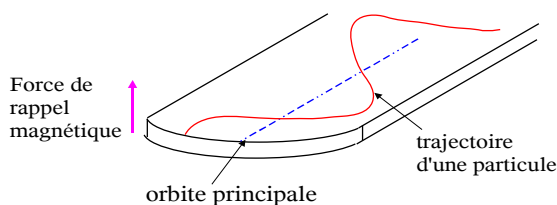
quadripôles de focalisation transverse



Sextupôles pour corriger le chromatisme des quadripôles

Les machines du type précédent sont appelées synchrotrons à fonctions séparées car chaque élément de la machine assure une fonction et une seule. Ce sont les machines les plus souples et qui permettent d'atteindre les énergies les plus élevées . En revanche , leur cycle de fonctionnement est complexe.

Les synchrotrons peuvent être classés selon leur principe de focalisation de leur faisceau . Un champ magnétique focalisant donne naissance à des oscillations dans le mouvement transverse des particules appelées oscillations bétatron (car découvertes auprès d'un bétatron qui est un accélérateur circulaire à électrons non-traité dans ce cours). Pour saisir l'origine de ces oscillations on peut utiliser une analogie avec le mouvement d'une bille dans un canal concave. Si la bille a originellement une quantité de mouvement transverse à l'axe du canal, la bille en se déplaçant oscillera dans le plan transverse à cet axe sous l'effet d'une force de rappel gravitationnelle. La force de rappel magnétique exercée par les quadripôles donne naissance à un mouvement comparable si les particules orbitant ont une quantité de mouvement transverse .



La longueur d'onde des oscillations bétatron ne doit pas être un multiple de l'une des dimensions de la machine. Sinon on peut obtenir une amplification résonnante de ces oscillations qui conduit à la perte du

faisceau .

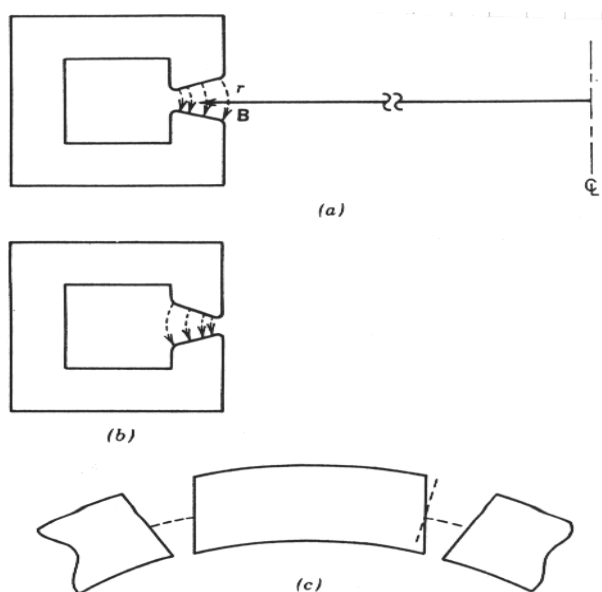
synchrotron à focalisation faible

Dans ce type de machines, la focalisation verticale est obtenue de la même manière que dans les cyclotrons classiques ; c'est-à-dire en faisant décroître le champ vertical en fonction de r . Cela conduit à une focalisation faible donnant lieu à des oscillations bêta-tron de fortes amplitudes qui requièrent une taille transverse importante du tube à faisceau et de l'entrefer des aimants. Comme l'amplitude des oscillations croît avec l'énergie des particules, ces machines ne peuvent être conçues au-delà d'une énergie de 10 GeV pour des protons. Les dernières machines de ce type ont été construites à la fin des années 50.

synchrotron à focalisation forte

Le champ de focalisation est à fort gradient. Il alterne d'un élément à l'autre. Le champ de focalisation est délivré par des quadripôles. L'amplitude des oscillations bêta-tron est limitée (à condition d'éviter les résonances) ce qui permet d'utiliser des aimants de dimensions raisonnables et donc d'accroître l'énergie de la machine. En revanche, la fréquence de ces oscillations croît, un peu comme pour une masse oscillant au bout d'un ressort dont la constante de raideur k augmente ($\omega = \sqrt{k/m}$). Tous les synchrotrons actuels marchent selon ce principe.

synchrotron à gradient alterné



Une focalisation forte est obtenue en disposant alternativement sur la circonférence de la machine des aimants à double fonction (courbure+ focalisation) selon la figure présentée ci-contre (synchrotron AGS (Alternate Gradient Synchrotron) de Brookhaven).

Cycle de fonctionnement

Nous allons maintenant déterminer les relations qui relient l'énergie des particules (ou leur quantité de mouvement) au champ magnétique et à la fréquence HF , en d'autres termes le cycle de fonctionnement d'un synchrotron.

Soit:

- δ la dimension de l'interstice d'accélération ;
- V_0 la tension maximale appliquée sur ce gap ;
- Φ_s la phase de synchronisation de la machine ;
- p_s la quantité de mouvement de la particule en phase ;

v_s sa vitesse .

La force accélératrice appliquée sur cette particule est :

$$F = q E = q V_0 \frac{\sin(\Phi_s)}{\delta}$$

Le gain en quantité de mouvement est donné par :

$$\Delta p_s = (q V_0 \frac{\sin(\Phi_s)}{\delta}) (\frac{\delta}{v_s}) \quad \text{où} \quad \frac{\delta}{v_s} = \Delta t$$

ou encore : (pour une machine circulaire)

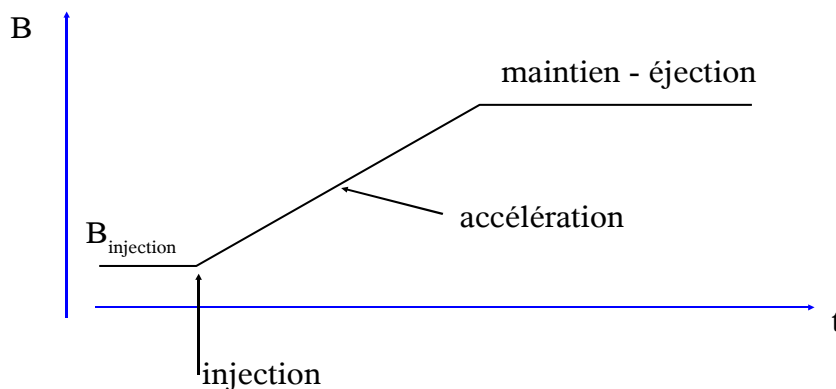
$$\frac{\Delta p_s}{\Delta t_r} \simeq \frac{d p_s}{d t} = (q V_0 \sin(\Phi_s) / \delta) (\delta / v_s) / (2 \pi R / v_s) \quad \text{avec} \quad \Delta t_r = 2 \pi R / v_s \quad (\text{temps de révolution})$$

qui se simplifie sous la forme :

$$\frac{d p_s}{d t} = \frac{q V_0 \sin(\Phi_s)}{2 \pi R} \quad , \text{ d'où:} \quad p_s(t) = p_{s0} + \frac{q V_0 \sin(\Phi_s)}{2 \pi R} t$$

avec p_{s0} étant la quantité de mouvement à l'injection.

Et puisque $p_s(t) = 0,3 z B(t) R$ du fait du maintien sur l'orbite des particules par le champ magnétique, on obtient que le champ magnétique est une fonction linéaire du temps (à V_0 constante) dans un synchrotron .



La fréquence de révolution est liée à la fréquence HF par : $\omega_{HF} = M \omega_r$, où M est le nombre de paquets de particules sur orbite . D'autre part , on a :

$$\omega_r = \frac{q B}{\gamma_s m} \quad \text{avec} \quad \gamma_s = (1 - (v_s/c)^2)^{-1/2} \quad ,$$

d'où

$$\omega_{HF} = \frac{q M B}{\gamma_s m}$$

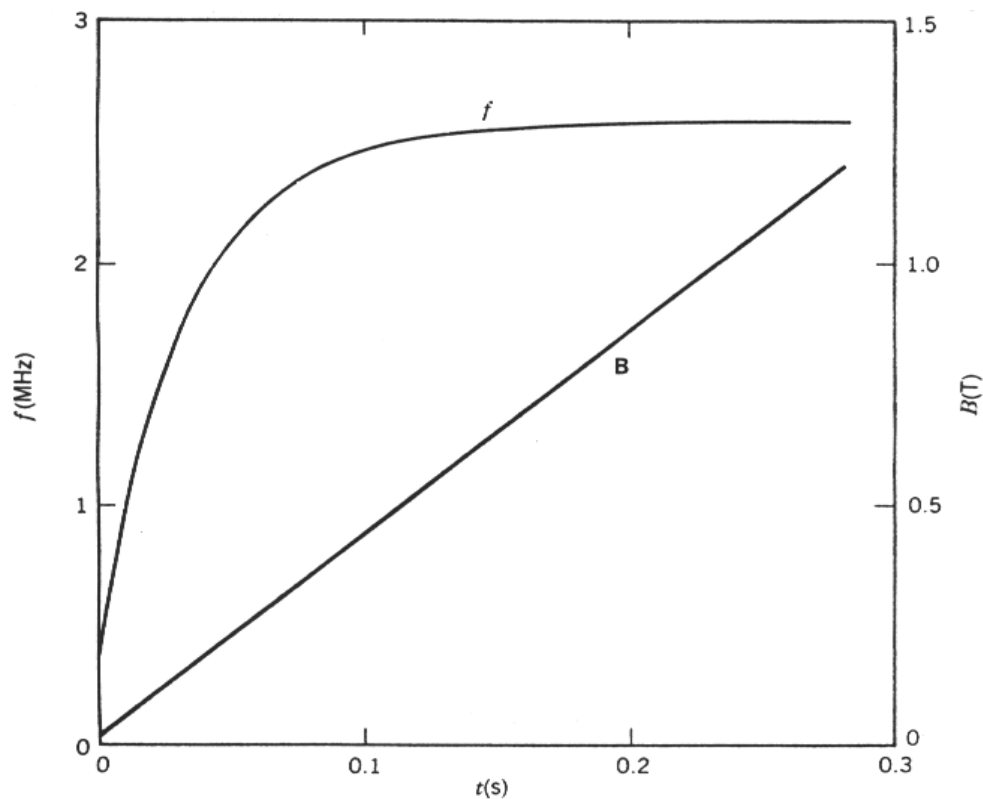
et puisque :

$$\gamma_s = E_s / m = \frac{\sqrt{p_s^2 + m^2}}{m} = ((q B R / m)^2 + 1)^{1/2} ,$$

on obtient finalement :

$$\omega_{HF} = \frac{q M B / m}{(1 + (q B R / m)^2)^{1/2}} .$$

Puisque B est une fonction linéaire de t , ω_{HF} ne croît pas linéairement avec le temps. Pour une différence de potentiels V_0 donnée dans la cavité accélératrice et un rayon R connu, on connaît la pente en temps du champ magnétique et la fonction d'évolution de la fréquence HF.

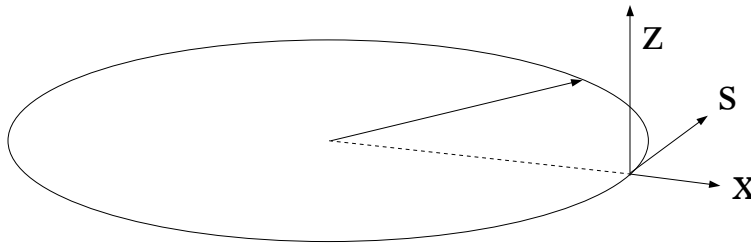


Dans les synchrotrons, le mouvement des particules est sujet à des oscillations autour de l'orbite moyenne provenant des fluctuations de la phase des particules qui circulent. Une fluctuation de la phase d'une particule par rapport à sa valeur moyenne entraîne en effet une variation de sa quantité de mouvement – car elle n'est plus synchrone avec l'onde HF dans la cavité accélératrice – qui à son tour se traduit par une modification du rayon de l'orbite. Ce phénomène porte le nom d'oscillations synchrotron.

7 Éléments de dynamique de faisceau :

7.1 Système de coordonnées :

La position d'une particule sur son orbite est repérée en utilisant le système mobile suivant :



Un particule légèrement écartée de l'orbite idéale d'une machine possède des coordonnées transverses (x et z) non nulles. La divergence du faisceau mesurée par rapport à l'axe s est donnée par :

$$\tan \theta_x \approx \theta_x = \frac{dx}{ds} = x' \quad \text{dans la direction horizontale et} \quad \tan \theta_z \approx \theta_z = \frac{dz}{ds} = z' \quad \text{dans la direction verticale.}$$

On notera également : $x'' = \frac{d^2 x}{ds^2}$ et $z'' = \frac{d^2 z}{ds^2}$.

7.2 Mouvement transverse bétatron : équation de Hill :

Si on s'intéresse à la déflexion verticale (changement d'angle) engendrée par un quadripôle fin de type F (focalisant dans la direction horizontale et défocalisant dans la direction verticale) d'épaisseur ds , on obtient :

$dz' = -kz ds$ où $k < 0$ (notez que la déflexion verticale est ici positive, orientée dans le sens trigonométrique) ; d'où : $z'' + kz = 0$. Plus généralement, si $k(s)$ décrit la raideur de focalisation le long de l'anneau, on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$z'' + k(s)z = 0 \quad \text{qui est l'équation de Hill selon l'axe vertical (équation linéaire du deuxième ordre).}$$

Dans la direction horizontale, il faut tout d'abord inverser le signe devant $k(s)$ (attention k est ici choisi comme étant négative pour être cohérent avec l'équation selon l'axe vertical), car le même quadripôle focalise dans cette direction, et tenir compte d'un terme de focalisation faible due aux dipôles dont la courbure est décrite par la fonction $\rho(s)$ et que nous allons justifier dans le prochain paragraphe, soit :

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho(s)^2} - k(s) \right) x = 0$$

Synchrotron à gradient constant : focalisation faible

Dans ces premiers synchrotrons (Cosmotron à BNL, Bevatron à Berkeley), la focalisation verticale était obtenue grâce à un gradient constant, c'est-à-dire $k(s)=cte=k$. $k > 0$, car le système focalise dans la direction verticale. L'équation du mouvement vertical devient alors :

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + k z = 0, \text{ qui admet pour solution : } z = z_0 \sin(\omega_s s) = z_0 \sin(\Phi(s)) \text{ avec } \omega_s = \sqrt{k} \text{ et } \Phi(s) = \omega_s s.$$

On calcule le nombre d'ondes bétatron de la machine de rayon R par :

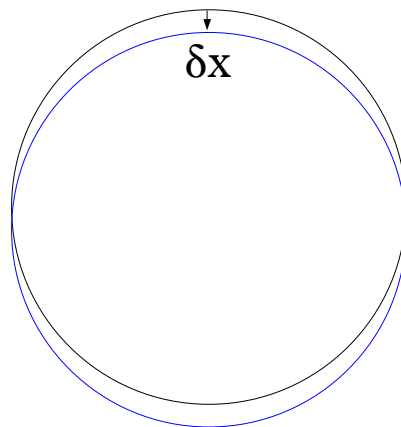
$$Q = \frac{2\pi R}{\lambda_s} = \frac{\omega_s}{2\pi} \oint_{\text{anneau}} ds = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{anneau}} \omega_s ds = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{anneau}} \Phi' ds = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{anneau}} \frac{ds}{\beta} \text{ avec } \lambda_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \text{ et } \Phi' = \frac{1}{\beta}.$$

β - l'inverse de la dérivée de la phase par rapport à s - est appelée la fonction bétatron.

Dans la direction horizontale, il n'existe pas de gradient de focalisation, l'équation de Hill est alors :

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = 0, \text{ qui admet pour solution : } x = x_0 \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \text{ dont la longueur d'onde est : } \lambda = 2\pi \rho \text{ ce}$$

qui peut se comprendre aisément sur la figure suivante :



Solution générale :

La solution générale de l'équation de Hill est :

$$x(s) = \sqrt{\beta(s)} \epsilon \cos(\Phi(s) + \Phi_0), \text{ et } x'(s) = \frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta(s)}} \left(\frac{\beta'(s)}{2} \cos(\Phi(s) + \Phi_0) - \sin(\Phi(s) + \Phi_0) \right)$$

dans laquelle :

- $\beta(s)$ est la fonction bétatron qui a la dimension d'une longueur ; ϵ est une constante a priori arbitraire dont nous verrons plus loin la signification (voir paragraphe sur l'émission) ;
- $\Phi(s)$ est la phase ; Φ_0 est une phase constante à l'origine .

$\beta(s)$ et $\Phi(s)$ sont des fonctions qui possèdent la même périodicité que la répartition des éléments magnétiques le long de la machine et qui de plus satisfont : $\frac{d\Phi(s)}{ds} = \Phi'(s) = \frac{1}{\beta(s)}$.

7.3 Matrice de transport :

Dans un synchrotron à fonctions séparées, les solutions de l'équation de Hill peuvent être calculées entre l'entrée et la sortie de chaque élément par une matrice de transport :

$$\begin{pmatrix} x(s_2) \\ x'(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s_1) \\ x'(s_1) \end{pmatrix} = M_{21} \begin{pmatrix} x(s_1) \\ x'(s_1) \end{pmatrix} .$$

En notant $\omega = \sqrt{\beta}$, $\omega_1 = \sqrt{\beta(s_1)}$, $\omega_2 = \sqrt{\beta(s_2)}$ et $\mu = \Phi(s_2) - \Phi(s_1)$ (avance de phase entre s_1 et s_2), on obtient (attention ω dans ce paragraphe n'est pas homogène à une pulsation angulaire) :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \mu - \omega_2 \omega'_1 \sin \mu & \omega_1 \omega_2 \sin \mu \\ -\frac{1 + \omega_1 \omega_2 \omega'_1 \omega'_2}{\omega_1 \omega_2} \sin \mu - \left(\frac{\omega'_1}{\omega_2} - \frac{\omega'_2}{\omega_1} \right) \cos \mu & \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \mu + \omega_1 \omega'_2 \sin \mu \end{pmatrix} .$$

Si on s'intéresse maintenant à la matrice de transport entre deux points successifs équivalents compte tenu de la périodicité de la machine, on a alors: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ et $\omega'_1 = \omega'_2 = \omega'$, la matrice précédente peut être écrite sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu - \omega \omega' \sin \mu & \omega^2 \sin \mu \\ -\frac{1 + \omega^2 \omega'^2}{\omega^2} \sin \mu & \cos \mu + \omega \omega' \sin \mu \end{pmatrix} , \text{ ou encore :}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \text{ avec : } \alpha = -\omega \omega' = -\frac{\beta'}{2} , \beta = \omega^2 ; \gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta}$$

(attention ces coefficients n'ont rien à voir avec les facteurs relativistes) .

M est appelée la matrice de Twiss de la structure périodique concernée.

Pour qu'une machine constituée de N super sections périodiques – dont chacune est modélisée par une matrice de Twiss M_S - soit stable dans le temps, il faut que M_S^{Nk} , où k est le nombre de tours correspondant à un grand temps de vie du faisceau , ne diverge pas. Cela implique les conditions suivantes : μ réelle , $|\frac{1}{2} Tr M_S| \leq 1$ et $|\lambda_i| = 1$ où λ_i sont les valeurs propres de la matrice M_S .

<i>élément</i>	<i>Matrice de transport</i>
section droite de longueur l	$\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Quadripôle de longueur l , focalisant F	$\begin{pmatrix} \cos(l\sqrt{ k }) & \frac{1}{\sqrt{ k }} \sin(l\sqrt{ k }) \\ - k \sin(l\sqrt{ k }) & \cos(l\sqrt{ k }) \end{pmatrix}$
Quadripôle de longueur l , défocalisant D	$\begin{pmatrix} \cosh(l\sqrt{ k }) & \frac{1}{\sqrt{ k }} \sinh(l\sqrt{ k }) \\ - k \sinh(l\sqrt{ k }) & \cosh(l\sqrt{ k }) \end{pmatrix}$
Secteur dipolaire (angle ϑ , rayon de courbure ρ)	$M_H = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho \sin\theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 1 & \rho\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Rectangle dipolaire (angle ϑ petit, rayon de courbure ρ , longueur l)	$M_H = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_V = \begin{pmatrix} 1 & l \\ \frac{-l}{\rho^2} & 1 \end{pmatrix}$

7.4 Émittance :

De la solution générale de l'équation de Hill, on peut tirer : $\frac{x(s)}{\sqrt{\beta(s)\epsilon}} = \cos(\Phi(s) + \Phi_0)$ que l'on peut substituer dans l'expression de $x'(s)$ pour obtenir :

$$-x'(s)\sqrt{\beta(s)\epsilon} + \frac{\beta'(s)}{2} \frac{x(s)}{\sqrt{\beta(s)\epsilon}} = \sin(\Phi(s) + \Phi_0) \quad \text{et puisque} \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

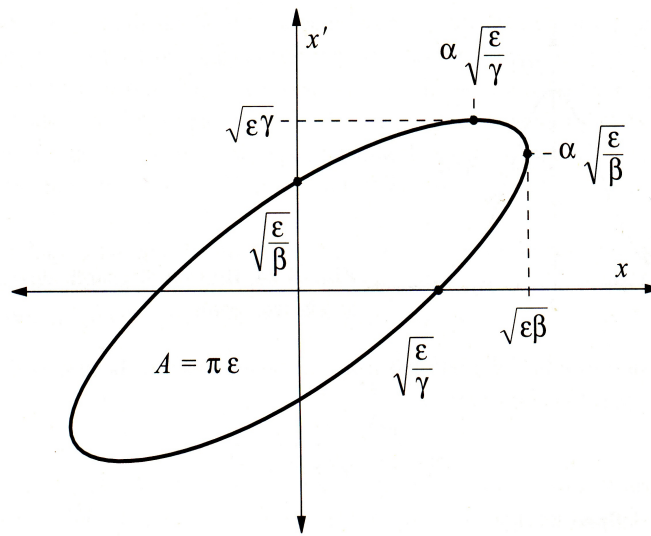
$$\left(\frac{x(s)}{\sqrt{\beta(s)\epsilon}}\right)^2 + \left(-x'(s)\sqrt{\beta(s)\epsilon} + \frac{\beta'(s)}{2} \frac{x(s)}{\sqrt{\beta(s)\epsilon}}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2(s)}{\beta(s)} + x'^2(s)\beta(s) + \alpha^2(s) \frac{x^2(s)}{\beta(s)} + 2\alpha(s)x(s)x'(s) = \epsilon$$

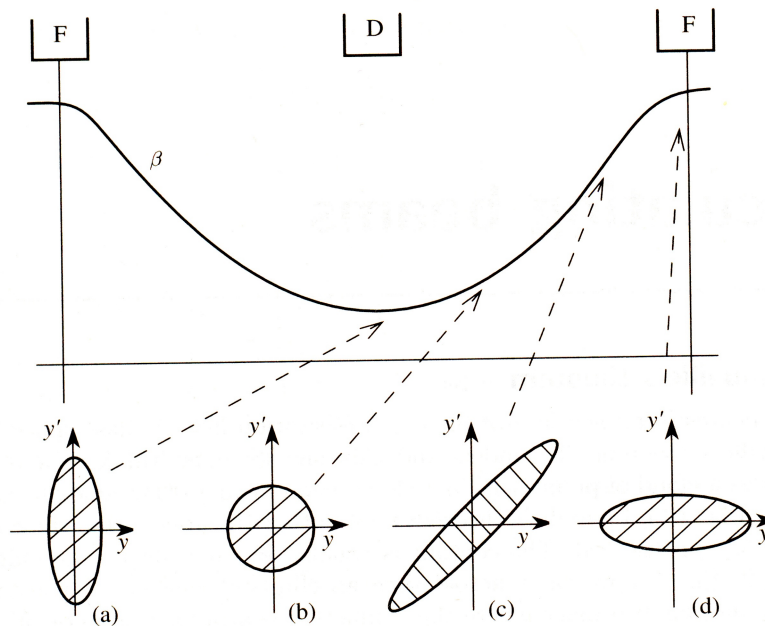
$$\gamma(s)x^2(s) + \beta(s)x'^2(s) + 2\alpha(s)x(s)x'(s) = \epsilon$$

Dans le plan (x, x') , ceci est l'équation d'une ellipse dans la surface est $\pi\epsilon$, où ϵ est une constante (si le problème est conservatif). ϵ est parfois appelée l'invariant de Snyder et Courant. L'évolution d'une particule dans la machine se fait telle qu'à tout moment, les coordonnées (x, x') d'une particule restent sur une ellipse, qui se déforme, mais dont la surface reste constante et égale à $\pi\epsilon$. Ceci est vrai si le système reste conservatif, c'est-à-dire si aucun terme dissipatif n'est ajouté à la dynamique (rayonnement synchrotron, interaction entre particules d'un même paquet, effet de charge d'espace ...). C'est une conséquence du théorème de Liouville qui implique la conservation de la surface de l'espace des phases occupé par un système.

Cette ellipse est appelée l'émittance de la particule en question. Définie de cette manière, les unités de ϵ sont $\pi \text{ m} \cdot \text{rd}$ ou $\pi \text{ mm} \cdot \text{mrd}$. On trouve également dans la littérature une définition qui n'exteriorise pas le facteur π . Dans ce cas les unités de l'émittance sont $\text{mm} \cdot \text{mrd}$.



Évolution de l'émittance d'une particule dans une structure FODO :



Un faisceau est constitué de nombreuses particules qui possèdent une dispersion de leurs coordonnées dans l'espace des phases. On peut définir l'émittance du faisceau comme l'émittance de la particule qui a l'amplitude de mouvement bêatron la plus grande. Mais plus généralement et pour un faisceau à l'équilibre, ou encore circulant dans une machine dont l'optique est adaptée, on définit l'émittance standard par rapport à l'écart type de la distribution des positions transverses des particules dans le faisceau, par la relation :

$$\epsilon_{std} = \frac{\sigma^2(s)}{\beta(s)}$$

où $\sigma(s)$ est l'écart type de la distribution en position transverse des particules au point

s de la machine. On note que l'enveloppe standard du faisceau suit la loi : $\sigma = \sqrt{\epsilon_{std} \beta(s)}$.

Focalisation dans une section droite

On examine ici l'évolution de la taille d'un faisceau focalisé par une structure quadripolaire dans une section droite (par exemple en un point d'interaction sur un collisionneur) . Le point de focalisation symétrique se trouve à la position $s=0$. En ce point la fonction bétatron atteint un minimum qui est noté β^* , et la dérivée de cette fonction est nulle , soit : $\alpha^* = 0$. On peut alors montrer que :

$$\beta(s) = \beta^* + \frac{s^2}{\beta^*} \quad \text{et} \quad \alpha(s) = -\frac{\beta'}{2} = -\frac{s}{\beta^*} \quad \text{soit pour l'évolution de l'écart type du faisceau :$$

$$\sigma(s) = \sqrt{\epsilon_{std} \beta(s)} = \sqrt{\epsilon_{std} \left(\beta^* + \frac{s^2}{\beta^*} \right)} .$$

Accélération et émittance normalisée

On observe que lorsque le faisceau est accéléré, l'émittance , telle que nous venons de la définir, n'est pas conservée. Elle semble se réduire. Or, l'accélération qui consiste à accroître la quantité de mouvement longitudinale du faisceau, ne devrait pas modifier l'apparence des distributions transverses . Cela provient du fait que nous n'avons pas utilisé les bonnes variables canoniques relativistes. En mécanique relativiste les variables canoniques sont : $p_x = m\gamma v_x$ et x . Or :

$$p_x = m\gamma \frac{ds}{dt} \frac{dx}{ds} = m(\gamma\beta) x' , \quad (m = cte) , \quad \text{ce qui signifie que l'espace de phase doit être examiné dans}$$

le plan $\gamma\beta x'$ et x . On définit alors l'émittance normalisée par :

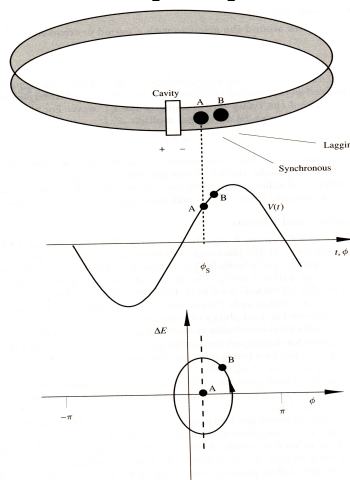
$$\epsilon^* = (\gamma\beta)\epsilon ,$$

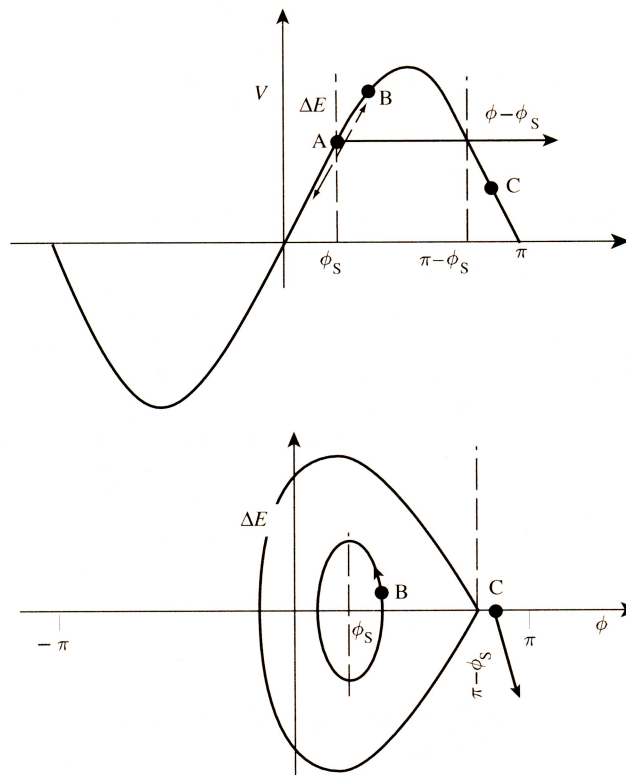
qui se conserve dans le processus d'accélération. (Attention γ et β sont ici les facteurs relativistes).

7.5 Dynamique longitudinale :

La stabilité longitudinale de la machine dépend en grande partie de la dispersion en quantité de mouvement des particules accélérées ainsi que de la stabilité de phase des cavités accélératrices. On supposera ici que cette phase est maîtrisée et qu'elle ne nuit pas à la stabilité de la machine.

Grossièrement, on peut dire que les particules plus rapides (lentes) arrivent plus vite (lentement) sur les cavités accélératrices, rencontrent un champ plus faible (fort) et sont donc moins (plus) accélérées. Une stabilisation de la phase peut-être obtenue selon le principe illustré sur le diagramme qui suit :





La dispersion en quantité de mouvement introduit – du fait de la courbure des dipôles - un couplage entre l'équation de Hill horizontale et le mouvement longitudinal, qui se traduit par l'apparition d'un second membre dans cette équation :

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho(s)^2} - k(s) \right) x = - \frac{1}{\rho(s)} \Delta p / p \quad , \text{ où :}$$

Δp est l'écart en quantité de mouvement de cette particule par rapport à la valeur centrale p (de l'orbite synchrone).

La position horizontale d'une particule est donnée par la solution de cette équation (solution générale sans second membre + solution particulière) , c'est-à-dire :

$$x_{p+\Delta p}(s) = x_p(s) + D(s) \frac{\Delta p}{p} \quad , \text{ dans laquelle } D(s) \quad , \text{ appelée fonction de dispersion, correspond à}$$

la position horizontale de l'orbite particulière pour laquelle $\frac{\Delta p}{p} = 1$. $D(s)$ est donc solution de

$$\text{l'équation : } D''(s) + \left(\frac{1}{\rho(s)^2} - k(s) \right) D(s) = - \frac{1}{\rho(s)} \quad .$$

Énergie de transition :

Le principe de stabilité de phase est un peu plus complexe que ce qui a été exposé jusqu'ici . En effet, une particule de plus petit moment est «tirée» sur une orbite de rayon plus petit. Le chemin plus court qu'elle parcourt pourrait alors compenser sa vitesse plus petite et faire que cette particule arrive plus tôt par rapport à la phase de la machine , recevant alors moins d'énergie. On montre qu'à basse énergie, c'est la variation de vitesse qui détermine l'écart de phase, par contre au-dessus d'une certaine énergie, appelée énergie de transition, c'est la variation du rayon de l'orbite qui l'emporte.

L'énergie (totale) de transition est donnée par : $E_{tr} = \sqrt{\frac{R}{\bar{D}}} m c^2$ où m est la masse de la particule, R le rayon de courbure nominal de la machine et \bar{D} est la valeur moyenne de la fonction de dispersion sur la circonférence de l'anneau.

Les synchrotrons à électrons fonctionnent toujours au-dessus de l'énergie de transition car la masse de ces particules est petite.

En revanche, dans les synchrotrons à protons, on franchit cette limite durant l'accélération. Au delà de l'énergie de transition il faut renverser la pente du champ accélérateur dans les cavités. Au franchissement de l'énergie de transition, on modifie donc la phase de telle manière à ce que le front de l'onde accélératrice soit descendant.

Oscillations synchrotrons

Le mouvement d'une particule possédant une quantité de mouvement légèrement écartée de la valeur nominale d'un synchrotron peut être caractérisé dans l'espace des phases longitudinal ($\Delta E/E, \Phi$) par un mouvement périodique sur la circonférence d'une ellipse centrée sur $(0, \Phi_s)$.

Pour de petites amplitudes et dans le régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque les particules ont été accélérées à leur énergie nominale maximale (ou avant que l'accélération ne commence), $\Phi_s=0$, ce mouvement est caractérisé par des oscillations dont la fréquence est reliée à celle de la machine par la formule suivante :

$$F_S = F_R \sqrt{\frac{\left| \frac{1}{\gamma^2} - \frac{\bar{D}}{R} \right| h e V_0}{2\pi m c^2 \beta^2 \gamma}},$$

dans laquelle :

- β et γ sont les facteurs relativistes de la particule de masse m ;
- \bar{D} est la valeur moyenne de la fonction de dispersion sur l'anneau ;
- R est la valeur nominale de la courbure dans les dipôles ;
- h est l'harmonique de la fréquence HF de la machine $F_{HF} = h F_R$;
- F_R est la fréquence de révolution des particules ;
- eV_0 est le gain maximal d'énergie dans les cavités accélératrices .

On définit également le nombre d'ondes synchrotron par : $Q_S = \frac{F_S}{F_R}$. À l'énergie de transition celui-ci est nul. Dans la plupart des synchrotrons il est inférieur ou égal à 10% ; ce qui pour des machines de grands diamètres conduit à une fréquence synchrotron qui est inférieure à 100 Hz et qui peut présenter des problèmes si elle passe par la valeur 50 Hz au cours de l'accélération.

8 Collisionneurs :

Pour augmenter l'énergie disponible dans le centre de masse, le mode de collision sur cible fixe devient très vite inadapté. L'énergie disponible dans le centre de masse de deux particules ultra-relativistes de mêmes masses (m) diffusant dans une configuration où l'une se trouve au repos (dans le laboratoire) et l'autre emporte une énergie E (dans le laboratoire) est:



$$E_{cm}^f = \sqrt{2 m E}$$

En mode collisionneur et si chaque particule a une énergie E (dans le laboratoire), l'énergie disponible dans le centre de masse est:

$$E_{cm}^c = 2 E$$

Ainsi fonctionner en mode collisionneur apporte un gain d'énergie disponible dans le CM de:

$$\frac{E_{cm}^c}{E_{cm}^f} = \frac{2 E}{\sqrt{2 m E}} = \sqrt{\frac{2 E}{m}}, \text{ soit un gain de 625 pour LEP200 et 122 pour le LHC .}$$

On comprend donc pourquoi la physique des très hautes énergies s'est rapidement intéressée au développement de collisionneurs e^+e^- puis de collisionneurs $p p$ (pp pour LHC). Un des problèmes majeurs que posent les collisionneurs est la réalisation de la zone d'interaction des faisceaux. Pour atteindre une luminosité adéquate, la focalisation des faisceaux au point d'interaction doit être particulièrement efficace.

D'une manière générale, la luminosité est définie par la relation suivante (pour un collisionneur $p_1 p_2$):

$$\frac{dN}{dt}(p_1 p_2 \rightarrow X) = \sigma(p_1 p_2 \rightarrow X) \cdot L$$

où:

L est la luminosité (en $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$),

$\frac{dN}{dt}(p_1 p_2 \rightarrow X)$ est le taux de réactions $p_1 p_2 \rightarrow X$

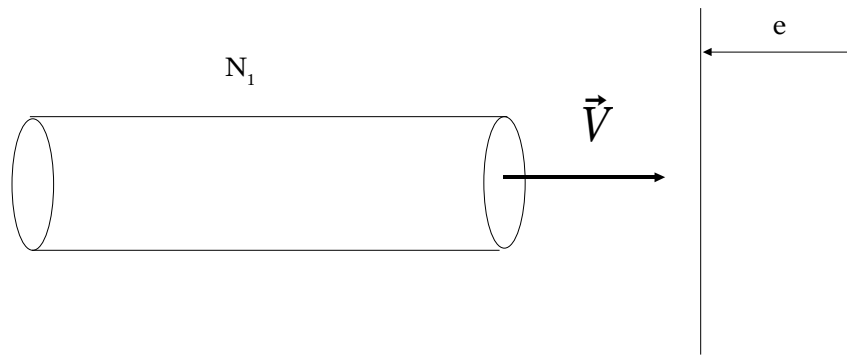
$\sigma(p_1 p_2 \rightarrow X)$ est la section efficace de la réaction $p_1 p_2 \rightarrow X$

On définit également la luminosité intégrée par :

$$N = \sigma \bar{L} \text{ avec } N \text{ étant le nombre total de réactions } p_1 p_2 \rightarrow X .$$

Nous allons examiner la façon dont se calcule la luminosité dans quelques cas typiques:

Diffusion sur une cible fixe :



Si:

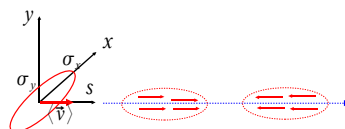
- f est la fréquence des paquets ;
- N_1 est le nombre de particules p_1 par paquet ;
- e est l'épaisseur de la cible fixe ;
- ρ est la masse volumique de la cible ;
- M est la masse atomique de la cible ;
- N est le nombre d'Avogadro ;

alors:
$$L = f N_1 \frac{e \rho}{M} N$$

exemple : p sur p , 10^{11} p / paquet , 10 cm d' H_2 liquide , $f = 300$ Hz $L = 12 \cdot 10^{36} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.
 C'est beaucoup plus que ce que l'on obtient actuellement sur un collisionneur.

Cas idéal de collision frontale :

Entre 2 faisceaux parfaitement parallèles et de sections transverses Gaussiennes et identiques :



Une définition plus covariante de la luminosité utilise les quadri-vecteurs densité de courant:

$$J = (\rho(\vec{r})c, \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r})) \text{ , quadri-vecteur densité de courant.}$$

On peut montrer que $J^2 = \rho_f(\vec{r})^2 c^2$ est conservé dans une transformation de Lorentz ($\rho_f(\vec{r})$ étant la densité de particules dans le référentiel lié au paquet, $\vec{v}(\vec{r})$ la vitesse de ces particules au point \vec{r}).

On a: N (nombre de particules par paquet) $= \int_V \rho(\vec{r}) d\vec{r}$. V étant le volume du paquet.

Alors on a:
$$L = \frac{f_c}{c^2} \int d^4x J_1 \cdot J_2$$

où:

J_1, J_2 sont les quadrivecteurs densité de courant associés aux paquets de particules p_1, p_2 ;
 f_c est la fréquence de collision.

C'est à partir de cette expression et en prenant des densités $\rho_1(\vec{r}), \rho_2(\vec{r})$ correspondant aux cas considérés que toutes les expressions données dans la fin de chapitre ont été calculées.

Pour le cas d'une collision frontale, on aboutit à :

$$L_0 = \frac{f_c N_1 N_2}{4\pi \sigma_x \sigma_y}$$

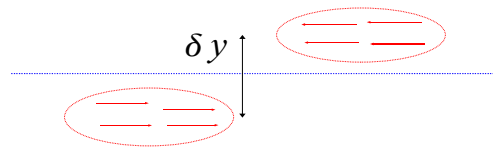
où:

f_c est la fréquence de collisions;
 N_1, N_2 sont les nombres de particules dans les paquets;
 σ_x, σ_y les écarts type transverses des paquets.

f_c est beaucoup plus grande sur un collisionneur circulaire que sur un collisionneur linéaire (SLC). De plus le nombre de particules que l'on peut mettre dans un même paquet est en général limité par les effets de répulsion coulombienne. On en déduit que pour atteindre la même luminosité, un collisionneur linéaire doit travailler avec des tailles transverses de faisceaux beaucoup plus faibles qu'une machine circulaire.

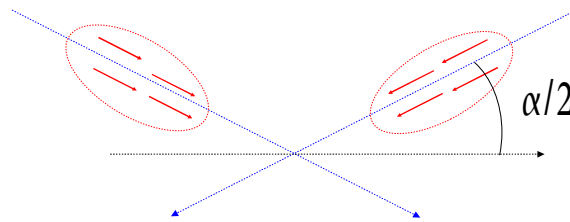
Si maintenant $\sigma_{x1} \neq \sigma_{x2}$, c'est-à-dire si les deux faisceaux n'ont pas les mêmes tailles transverses, la formule demeure mais on remplace $\sqrt{2} \sigma_x$ par $\Sigma = \sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}$.

Les faisceaux ont un défaut d'alignement



$$L(\delta_x, \delta_y) = L_0 \exp\left(-\frac{\delta_x^2}{4\sigma_x^2} - \frac{\delta_y^2}{4\sigma_y^2}\right)$$

Les faisceaux se croisent avec un angle

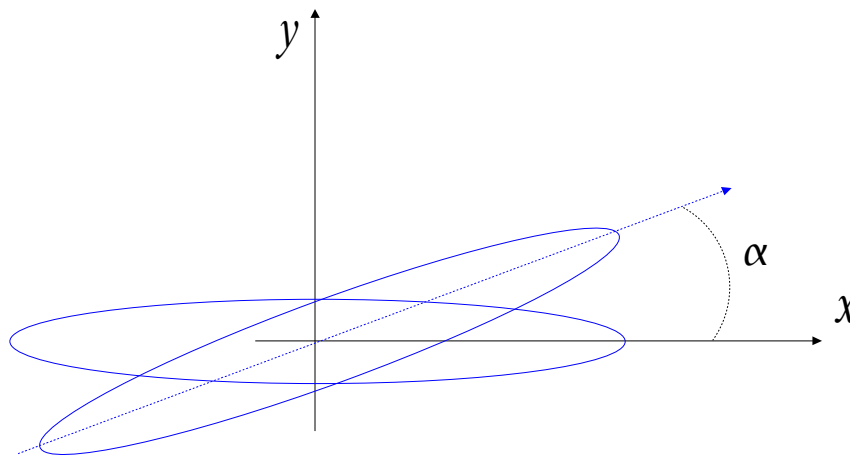


$$L(\alpha) = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_z \operatorname{tg}(\alpha/2)}{\sigma_x}\right)^2}} \approx \frac{L_0}{(1 - \alpha^2 / 8 \alpha_c^2)}$$

avec $\alpha_c = \frac{\sigma_x}{\sigma_z}$

LHC : $\alpha = 200 \mu\text{rad}$, $\alpha_c = 0,2 \text{ mrad}$, $L/L_0 = 0,88$

Les faisceaux sont asymétriques et tournés l'un par rapport à l'autre :



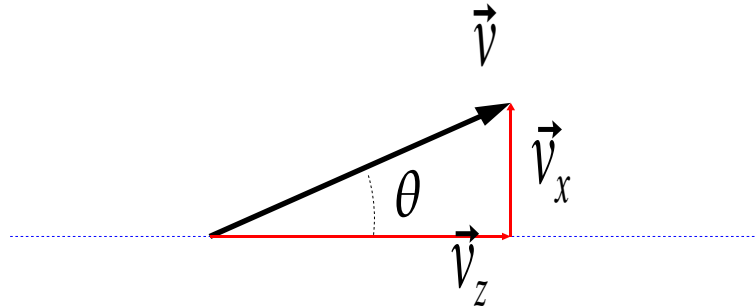
$R = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ rapport d'aspect

$$L(\alpha) = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \sin^2(\alpha) (R^2 - 2 + 1/R^2) / 4}}$$

$$= L_0 \left(1 - \alpha^2 \frac{R^2}{8}\right) \quad \text{si } R \gg 1$$

Les faisceaux ne sont pas parallèles

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des faisceaux à enveloppes parallèles : c'est ce que l'on appelle des faisceaux à émittance nulle. L'émittance est une grandeur qui mesure le parallélisme d'un faisceau, ou plutôt son défaut de parallélisme. En pratique, les faisceaux ne sont jamais totalement parallèles car les particules qui les composent ont une certaine distribution de quantité de mouvement transverse.



$$\sin \theta = \frac{v_x}{v} \quad \text{si } \theta \text{ très petit alors, } \theta = \frac{v_x}{v_z}$$

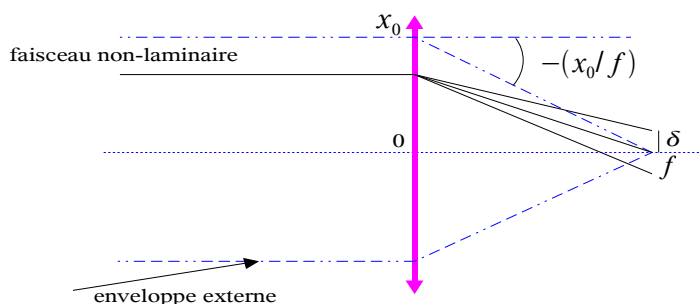
Dans l'espace des phases, le faisceau est représenté par l'ensemble des points de coordonnées:

$$\{x^i, v_x^i, y^i, v_y^i, z^i, v_z^i\} .$$

Les concepteurs d'accélérateurs préfèrent souvent utiliser une autre représentation dans un espace connexe qu'ils nomment l'espace des traces et dans lequel les particules composant le faisceau ont les coordonnées suivantes:

$$\{x^i, x'^i, y^i, y'^i, s^i, \delta^i\} \quad \text{avec} \quad x'^i = \frac{v_x^i}{v_s^i}, \quad y'^i = \frac{v_y^i}{v_s^i} \quad \text{et} \quad \delta^i = \frac{E^i - E_0}{E_0}, \quad E_0 = \langle E^i \rangle .$$

Pour mieux comprendre ce que représente l'émittance et en donner une définition, nous allons prendre un exemple. Il s'agit d'un faisceau à enveloppe quasi-parallèle mais dans lequel les particules ont une distribution en quantité de mouvement transverse de largeur non-nulle. On ne traitera que le cas à une dimension transverse. Le faisceau passe dans un quadripôle qui agit comme une lentille convergente dans la dimension traitée.



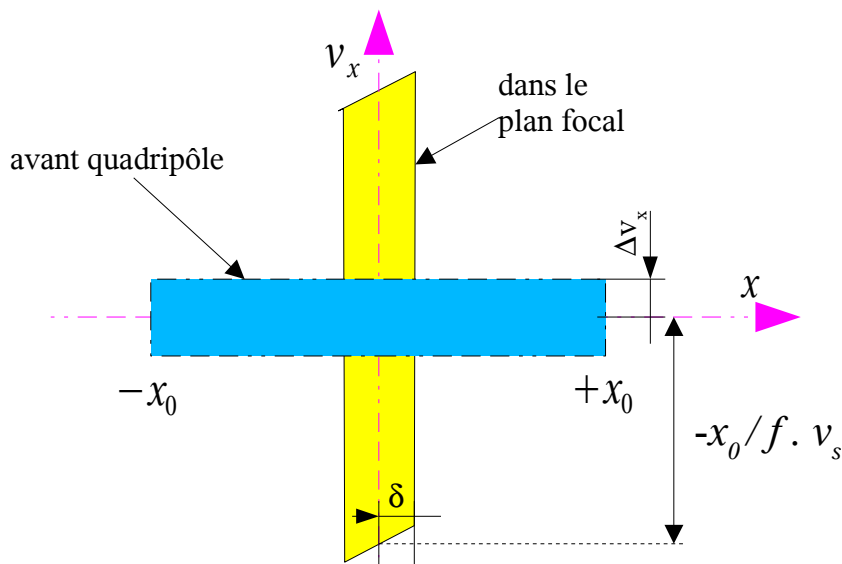
En amont du quadripôle, le faisceau présente un spectre de vitesse transverse ayant une largeur maximale Δv_x et une extension spatiale couvrant l'intervalle $[-x_0, x_0]$. En aval, la vitesse transverse des particules est comprise entre $-(x_0/f) \cdot v_s$ et $+(x_0/f) \cdot v_s$. On souhaite maintenant connaître la valeur de l'extension maximale spatiale δ au point focal, sachant que c'est cette grandeur que l'on cherche à réduire au minimum. La surface de l'espace de phase délimitant le faisceau en amont du

quadripôle est:

$$A_p = 4 x_0 \Delta v_x .$$

Dans le plan focal, cette surface devient:

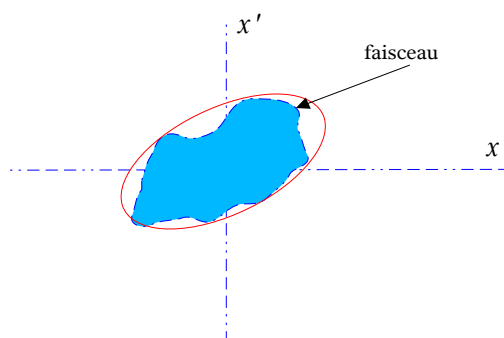
$$A_f = 4 \delta \frac{x_0}{f} \cdot v_s .$$



À condition que la densité de particules dans le faisceau soit forte, que les transformations mises en jeu soient réversibles et qu'il n'y ait pas de collision interne, on peut montrer (théorème de Liouville) que:

$$A_p = A_f \quad \text{d'où :} \quad \delta = \frac{\Delta v_x}{v_s} \cdot f .$$

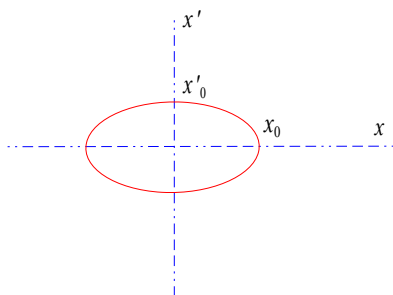
L'émittance est une mesure du volume (ou de la surface dans l'exemple précédent) de l'espace de phase occupé par le faisceau . Ce n'est pas exactement le volume occupé, mais plutôt un volume effectif qui englobe dans l'espace des traces tous les points représentant le faisceau . Par exemple pour un problème à une dimension, la tache réelle qui décrit le faisceau est enveloppée par une ellipse conformément à la figure suivante :



L'émittance dans ce cas est:

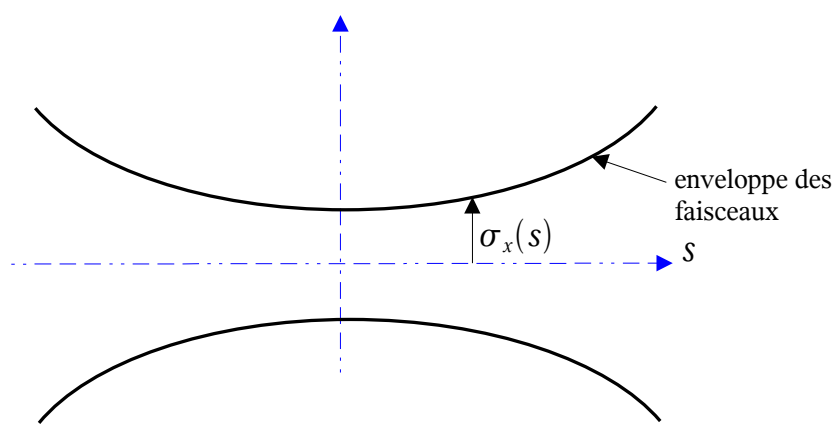
$$\epsilon_x = \iint_{\text{ellipse}} dx dx' / \pi .$$

Si l'ellipse est droite comme dans la figure qui suit:



alors: $\epsilon_x = x_0 x'_0$ en unité π -m-rad , ou $\epsilon_x = \pi x_0 x'_0$ si π est omis dans la définition (en unité m-rad).

Pour en revenir au croisement de deux faisceaux convergents mais à émittance non-nulle:



La taille transverse de l'enveloppe des faisceaux est obtenue par la formule suivante (voir 7.4) :

$\sigma_x(s) = \sqrt{\left(\beta_x^* + \frac{s^2}{\beta_x^*}\right) \cdot \epsilon_x}$, dans laquelle β_x^* est la valeur de la fonction bêatron au point d'interaction dans la direction x . À $s=0$, c'est-à-dire au point de collision, la luminosité suit l'expression ci-dessous:

$$L_0 = \frac{f_c N_1 N_2}{4 \pi \sqrt{\beta_x^* \epsilon_x} \sqrt{\beta_y^* \epsilon_y}} \quad \text{si } \beta^* \gg \sigma_s .$$

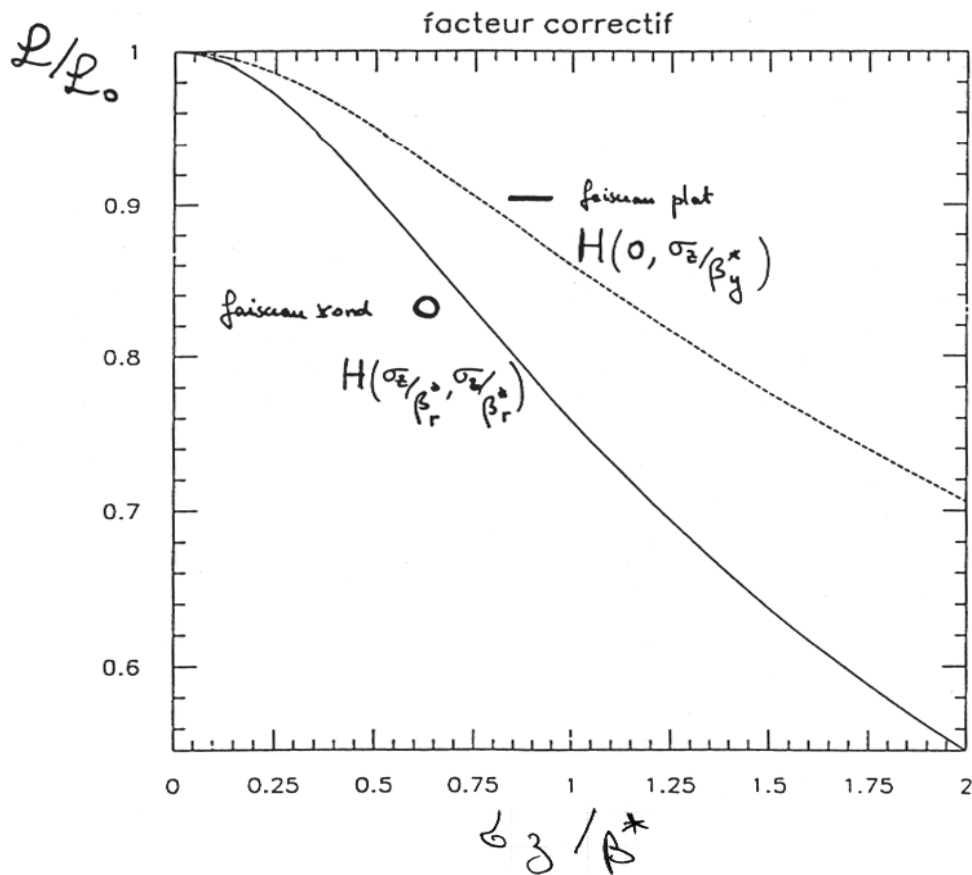
De plus , si le faisceau est rond , c'est à dire si $\epsilon = \epsilon_x = \epsilon_y$ et $\beta_x^* = \beta_y^* = \beta^*$, la formule précédente se simplifie pour devenir :

$$L_0 = \frac{f_c N_1 N_2}{4 \pi \beta^* \epsilon} .$$

Si la taille longitudinale du faisceau devient non-négligeable devant β^* , il faut tenir compte de corrections car le faisceau n'est pas focalisé au même point au même instant. Ces corrections sont procurées par la fonction H telle que:

$$L\left(\frac{\sigma_s}{\beta_x^*}, \frac{\sigma_s}{\beta_y^*}\right) = L_0 H\left(\frac{\sigma_s}{\beta_x^*}, \frac{\sigma_s}{\beta_y^*}\right)$$

qui est représentée dans le graphique ci-dessous .



Exemple : le LHC

Le temps séparant deux paquets est de 25 ns, ce qui correspond à une fréquence de collisions de 40 MHz. Il y a 10^{11} protons par paquet. L'émittance normalisée (notée ϵ^* avec $\epsilon^* = \beta \gamma \epsilon$) est de $3,75 \cdot 10^{-6}$ m.rad. L'écart type de la répartition longitudinale du faisceau est de 7,5 cm et la valeur de la fonction bêatron au point de collision est de 0,5 m. Les faisceaux - tous deux constitués de protons - se croisent avec un angle de 200 μ rad. Les faisceaux sont considérés comme étant ronds :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{\epsilon \beta^*} = \sqrt{5 \cdot 10^{-10} \cdot 0,5} = 16 \mu\text{m} \text{ d'où : } L_0 = \frac{4 \cdot 10^7}{4 \pi} \frac{10^{22}}{0,5 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = 1,27 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

L'angle de croisement réduit légèrement la luminosité en accord avec la formule suivante :

$$L(\alpha) = L_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{8\alpha_c^2}\right) \text{ avec } \alpha_c = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{16}{75000} = 0,213 \text{ mrad}$$

d'où finalement:

$$L(0,2) = L_0 \left(1 - \frac{0,2^2}{8 \times 0,213^2}\right) = 1,1 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

8.1 Refroidissement des faisceaux d'antiparticules :

L'émittance des faisceaux joue un rôle crucial pour l'obtention d'une haute luminosité sur un collisionneur. On peut comprendre qu'il faut que cette grandeur soit minimisée à la source ou tout du moins dans les premiers étages du système. Cela est aisé quand il s'agit de particules de matière (e^- , p ..) qui existent au repos. C'est plus délicat pour les faisceaux d'antimatière (e^+ , antiproton, ...) qui sont des produits secondaires. Il faut «refroidir» ces faisceaux avant de les accélérer.

Cas des positons :

Leur refroidissement utilise les propriétés du rayonnement synchrotron. Les positons perdent beaucoup d'énergie par rayonnement synchrotron. La puissance émise croît comme la puissance quatrième de leur énergie. Les positons les plus énergétiques perdent ainsi plus d'énergie que les positons lents. À chaque tour chaque positon reçoit la même quantité de mouvement des cavités accélératrices. Au total on obtient une réduction de la largeur du spectre en énergie longitudinale des positons.

L'amortissement de la vitesse transverse provient du rayonnement synchrotron induit par les oscillations bétatron (ou les forces de rappel magnétiques des quadripôles).

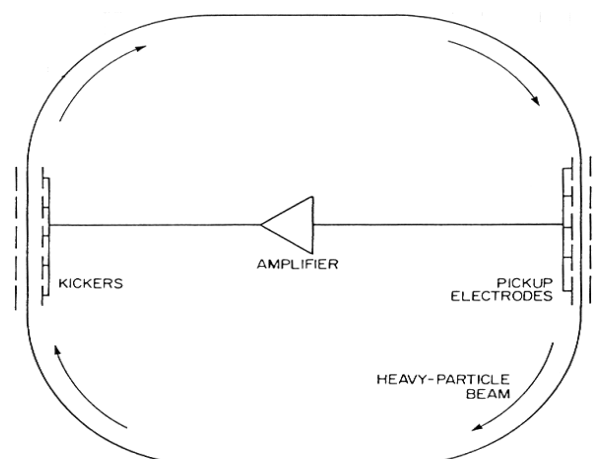
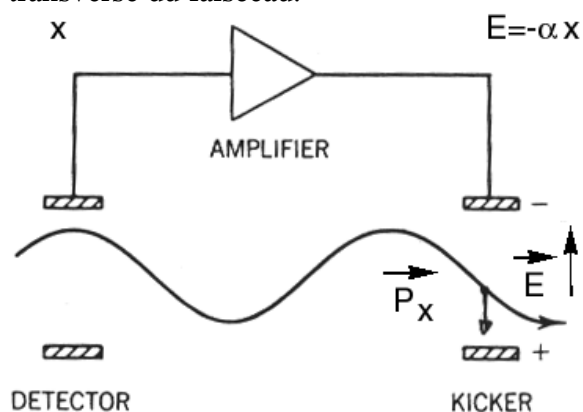
Le refroidissement des positons est réalisé dans des machines circulaires spéciales situées dans les premiers étages d'accélération. Le temps de refroidissement pour des positons de 1 GeV dans un anneau de 20 m de diamètre est d'environ 20 ms.

Cas des antiprotons :

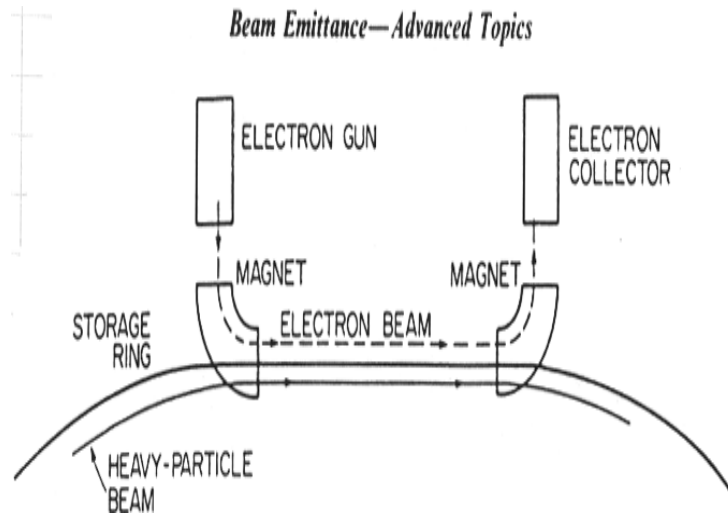
Ils sont peu sujets au rayonnement synchrotron. Ils existent deux possibilités pour réduire la «température» des antiprotons: le refroidissement stochastique (ou bétatron), utilisé au premier stade du refroidissement, et le refroidissement par électrons qui permet de baisser notablement plus la «température» du faisceau.

Refroidissement stochastique

Un détecteur de position mesure l'excursion transverse du faisceau circulant dans un anneau de stockage et transmet un signal de correction à un «kicker» situé à une distance $(2n+1)\frac{\lambda_b}{4}$ en aval, où λ_b est la longueur d'onde des oscillations bétatron dans l'anneau. Si le faisceau passe stochastiquement par un maximum d'élongation sur le détecteur de position, alors sa quantité de mouvement sera maximale à l'emplacement du «kicker». Une impulsion électrique proportionnelle à la position transverse mesurée permet alors de réduire la largeur de la distribution de la quantité de mouvement transverse du faisceau.



Refroidissement par électrons



Sur une section droite d'un anneau de stockage, on injecte de façon synchrone un faisceau d'électrons «froids» circulant à la même vitesse que les antiprotons. Les aimants de déviation agissent sur les électrons sans perturber les antiprotons qui portent une quantité de mouvement beaucoup plus grande (m_p/m_e). Les électrons sont mis en contact «thermique» avec les antiprotons par l'effet des forces coulombiennes. L'énergie «thermique» excédentaire du faisceau d'antiprotons est progressivement transmise au faisceau d'électrons qui est constamment renouvelé à la source froide.

9 Pour en savoir plus :

- Principles of charged particle acceleration , Stanley Humphries , John Wiley & sons (1986)
- Charged particle beams , Stanley Humphries , John Wiley & sons (1990)
- Particle accelerator physics , Helmut Wiedermann , Springer - Verlag (1993)
- Principles of cyclic particle accelerators , Johan J. Livingood , D. Van Nostrand Company (1961)
- The Physics of Particle Accelerators , Klaus Wille , Oxford (2000)
- An Introduction to Particle Accelerators , Edmund Wilson , Oxford (2001)
- An introduction to the Physics of Particle Accelerators, Mario Conte and William W Mackay World Scientific (1991)